জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক অনুমোদিত

উচ্চ মাধ্যমিক জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস

আফসার উজ-জামান



আইডিয়াল লাইব্রেরী ঢাকা

পরিমার্জিত শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি অনুযায়ী প্রণীত এবং জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড (NCTB) কর্তৃক উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের পাঠ্যপুস্তক হিসেবে অনুমোদিত।
[পুনঃ অনুমোদন পত্র সংখ্যা ঃ ১০৮৭ ; তারিখ ঃ ০৪/০৮/২০০৮ ইং]

উচ্চ মাধ্যমিক

জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস

একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর জন্য

* সংশোধিত ও পরিমার্জিত সংস্করণ ২০১১।
* সকল বোর্ডের ২০১১ সনের প্রশ্নসহ কয়েক বছরের প্রশ্ন সংযোজিত।

প্রফেসর **আফসার উজ-জামান**
চেয়ারম্যান (অবসরপ্রাপ্ত)
রাজশাহী শিক্ষা বোর্ড, রাজশাহী
প্রাক্তন প্রফেসর ও বিভাগীয় প্রধান, গণিত বিভাগ, রাজশাহী সরকারি কলেজ, রাজশাহী ; প্রিন্সিপাল, রাজশাহী সরকারি সিটি কলেজ, রাজশাহী এবং এন.এস. সরকারি কলেজ, নাটোর; ভাইস-প্রিন্সিপাল, নিউ সরকারি ডিগ্রী কলেজ, রাজশাহী; সহযোগী অধ্যাপক ও বিভাগীয় প্রধান, গণিত বিভাগ, সিলেট সরকারি কলেজ, সিলেট ও সহকারী অধ্যাপক, গণিত বিভাগ, চট্টগ্রাম সরকারি কলেজ, চট্টগ্রাম; প্রফেসর, গণিত বিভাগ, বাংলাদেশ ইনস্টিটিউট অব টেকনোলজী, রাজশাহী; খণ্ডকালীন অধ্যাপক, গণিত বিভাগ, রাজশাহী বিশ্ববিদ্যালয়, রাজশাহী।

সম্পাদনায়

ড. মুনিবুর রহমান চৌধুরী
প্রফেসর ও চেয়ারম্যান (অব.)
গণিত বিভাগ
ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়, ঢাকা।

আইডিয়াল লাইব্রেরী ঢাকা

প্রকাশনায় ঃ
মোহাম্মদ আইয়ুব আলী, এম. এ.
২/৩, বাংলাবাজার,
ঢাকা—১১০০

প্রথম সংস্করণ	ঃ	জুন,	১৯৯৯
দ্বিতীয় সংস্করণ	ঃ	মে,	২০০০
তৃতীয় সংস্করণ	ঃ	জুন,	২০০১
চতুর্থ সংস্করণ	ঃ	জুলাই,	২০০২
পঞ্চম সংস্করণ	ঃ	আগস্ট,	২০০৩
ষষ্ঠ সংস্করণ	ঃ	জুলাই,	২০০৪
সপ্তম সংস্করণ	ঃ	আগস্ট,	২০০৪
অষ্টম সংস্করণ	ঃ	আগস্ট,	২০০৫
নবম সংস্করণ	ঃ	জুলাই,	২০০৬
দশম সংস্করণ	ঃ	মার্চ,	২০০৭
একাদশ সংস্করণ	ঃ	জুলাই,	২০০৮
দ্বাদশ সংস্করণ	ঃ	মার্চ,	২০০৯
ত্রয়োদশ সংস্করণ	ঃ	জুন,	২০১০
চতুর্দশ সংস্করণ	ঃ	জুন,	২০১১

[সংশোধিত ও পরিমার্জিত]

মূল্য ঃ ৮৫'০০ টাকা

কম্পিউটার কম্পোজ ঃ
আইডিয়াল কম্পিউটার
৩৪, নর্থব্রুক হল রোড
ঢাকা—১১০০

মুদ্রণে ঃ
নোবেল প্রিণ্টার্স
১১৪, নয়া পল্টন
ঢাকা—১০০০

ভূমিকা

উচ্চ মাধ্যমিক জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস পুস্তকখানি জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড-এর নতুন পাঠ্যসূচি অনুযায়ী রচিত হয়েছে। পুস্তকখানি রচনার সময় পাঠ্যসূচির বিষয়বস্তু ও নির্দেশনা সঠিকভাবে বাস্তবায়ন করার চেষ্টা করা হয়েছে। পরবর্তীতে দেশের প্রখ্যাত কয়েকজন গণিতবিদের সপ্রশংস মূল্যায়নের ভিত্তিতে পুস্তকখানি জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক উচ্চ মাধ্যমিক শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক হিসেবে অনুমোদন লাভ করেছে। এখানে কয়েকটি বিষয়ের উল্লেখ করা প্রয়োজন মনে করছি। সঞ্চার পথের বর্ণনায় গতানুগতিক ধারণা "চলমান বিন্দুর পথ" এই উক্তি পরিহার করে "সঞ্চার পথ কার্তেসীয় সমতলে শর্তাধীনে গঠিত বিন্দুসমূহের সেট" এইভাবে উপস্থাপন করার নির্দেশ আছে। নির্দেশনা অনুসরণ করে বর্তমান পুস্তকে এভাবেই সেটের মাধ্যমে সঞ্চার পথের ধারণা উপস্থাপন করার চেষ্টা করা হয়েছে। কোনক জ্যামিতিতে অধিবৃত্ত পর্যন্ত সংক্ষিপ্ত আলোচনা অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে ও লেখচিত্রের উপর সঙ্গত কারণেই গুরুত্ব দেয়া হয়েছে। জ্যামিতির বিষয়বস্তুর স্পষ্ট ধারণার জন্য লেখচিত্রের বিকল্প নেই।

ক্যালকুলাসের পাঠ্যসূচিতে স্বাভাবিক লগের জন্য ln সংকেত ব্যবহার করার কথা বলা হয়েছে। তাই বর্তমান পুস্তকখানিতে পাঠ্যসূচি অনুসরণ করে স্বাভাবিক লগারিদমের জন্য log ব্যবহার না করে ln সংকেতই ব্যবহার করা হয়েছে।

অন্তরকের প্রয়োগ অধ্যায়ে পরিবর্তনের হার, স্পর্শক এবং ফাংশনের চরম মান আলোচনা করা হয়েছে। নির্দিষ্ট যোগজ পদ্ধতি প্রয়োগ করে বৃত্ত, উপবৃত্ত প্রভৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সীমিত জ্ঞানের কথা স্মরণ রেখে এবং পাঠ্যসূচির নির্দেশনা অনুসরণ করে এসব ক্ষেত্রে জটিল আলোচনা পরিহার করে সহজভাবে ও সংক্ষেপে বিষয়গুলো উপস্থাপন করা হয়েছে।

পুস্তকখানি প্রণয়নের সময় দেশী ও বিদেশী বহু পুস্তকের সাহায্য নেয়া হয়েছে। আমি সে সমস্ত গ্রন্থকারদের কাছে কৃতজ্ঞতা প্রকাশ করছি। ব্যবহৃত পুস্তকসমূহের একটি তালিকা গ্রন্থপঞ্জীতে দেয়া হল। পুস্তকখানিতে অনিচ্ছাকৃত কোন ভুল-ত্রুটি পরিলক্ষিত হলে পরবর্তী সংস্করণে তা শুদ্ধ করা হবে।

পরিশেষে পুস্তকখানির মান উন্নয়নের বিষয়ে যে কোনো প্রস্তাব সাদরে গ্রহণ করা হবে।

আফসার উজ-জামান

পাঠ্যসূচি

উচ্চ মাধ্যমিক গণিত

জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস

জ্যামিতি

স্থানাঙ্ক ঃ ১. স্থানাঙ্ক ২. কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক ৩. দূরত্ব সূত্র ৪. অনুপাত সূত্র ৫. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ৬. সঞ্চারপথ।

সরলরেখা ঃ ১. ঢাল ২. সরলরেখার প্রমিত সমীকরণসমূহ ৩. সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ ৪. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু ৫. দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ ৬. রেখাসমূহের সমান্তরাল ও লম্ব হওয়ার শর্ত ৭. বিন্দু থেকে রেখার দূরত্ব ৮. কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

বৃত্ত ঃ ১. নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ ২. বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ ৩. স্পর্শক ও স্পর্শকের সমীকরণ ৪. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য।

কনিক ঃ ১. উপকেন্দ্র, দিকাক্ষ ও উৎকেন্দ্রিকতা ২. পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত ও অধিবৃত্ত ৩. পরাবৃত্তের সমীকরণ ও লেখচিত্র ৪. উপবৃত্তের সমীকরণ ও লেখচিত্র ৫. পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র, দিকাক্ষ ও উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয়।

ভেক্টর ঃ ১. ভেক্টর রাশি ২. ভেক্টর সমতা, শূন্য ভেক্টর ও একক ভেক্টর ৩. ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার দ্বারা গুণ ৪. ভেক্টরের অভিক্ষেপ ৫. ভেক্টরের স্কেলার গুণন ৬. ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক পদ্ধতি ৭. একক ভেক্টর i, j, k.

ক্যালকুলাস

ফাংশন ও সীমা ঃ ১. ফাংশনের ধারণা ব্যাখ্যা ২. উদাহরণ ও লেখচিত্রের সাহায্যে সীমার আলোচনা ৩. একদিকবর্তী সীমা ৪. লেখচিত্রের সাহায্যে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধারণা ৫. সীমার মৌলিক ধর্মাবলি আলোচনা ৬. অসীম সীমার ধারণা। ৭. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}, \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

অন্তরীকরণ ঃ ১. নতি ও সীমার মাধ্যমে অন্তরক বর্ণনা ও নির্ণয় ২. ফাংশনের যোগফল, গুণফল ও ভাগফলের অন্তরক নির্ণয় ৩. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$; e^x, a^x $\ln(x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\text{cosec } x$-এর অন্তরক নির্ণয় ৪. অন্তরক নির্ণয় ঃ সংযোজিত ফাংশন, পরামিতি সমীকরণ, অব্যক্ত ফাংশন ও বিপরীত ফাংশন।

পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ ঃ ১. পর্যায়ক্রমিক অন্তরক ২. ম্যাকলরিনের ধারা ৩. অন্তরকের প্রয়োগ।

যোগজীকরণ ঃ ১. প্রতিঅন্তরক হিসেবে যোগজ, কতিপয় প্রমিত ফাংশনের যোগজ ২. যোগজের যোগাশ্রয়ী ধর্ম ৩. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ, মূলদ ভগ্নাংশ করে যোগজ, সখণ্ড পদ্ধতিতে যোগজ।

নির্দিষ্ট যোগজ ও এর প্রয়োগ ঃ ১. নির্দিষ্ট যোগজ ও এর প্রয়োগ (simple case হবে)।

মান বণ্টন

প্রথম পত্র	নম্বর	দ্বিতীয় পত্র	নম্বর
বীজগণিত	৩০	ক্যালকুলাস	৩০
ত্রিকোণমিতি	১৮	বলবিদ্যা	৩০
জ্যামিতি	২৭	বিচ্ছিন্ন গণিত	১৫
ব্যবহারিক	২৫	ব্যবহারিক	২৫
	১০০		১০০

প্রশ্নপত্র প্রণয়নের নীতিমালা ঃ
একই শিরোনামের অধ্যায় থেকে বিকল্প (অথবা) প্রশ্ন থাকবে।

সূচীপত্র

জ্যামিতি

ক্যালকুলাস

জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

স্থানাঙ্ক

COORDINATES

1. সূচনা (Introduction)

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি বীজগণিত এবং জ্যামিতির মধ্যে যোগসূত্র স্থাপন করে। স্থানাঙ্কের সাহায্যে বীজগণিতীয় সমীকরণ থেকে প্রাপ্ত বিভিন্ন বক্ররেখার চিত্র অঙ্কন করা যায় এবং বক্ররেখাসমূহের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য পর্যালোচনা সহজতর হয়। বিখ্যাত ফরাসি পণ্ডিত রেনে দে কার্ত (Rene Des Cartes 1596—1650) প্রথম সমতলীয় জ্যামিতিতে স্থানাঙ্কের অবতারণা করেন। এভাবেই স্থানাঙ্ক জ্যামিতির উদ্ভব।

2. সংখ্যারেখায় স্থানাঙ্ক (Coordinates on the real line)

সমতলীয় স্থানাঙ্কের যথাযথ আলোচনার জন্য প্রথমে সরলরেখায় স্থানাঙ্কের অবতারণা করা সুবিধাজনক। আমরা জানি, যে কোনো অসীম সরলরেখায় অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে **মূলবিন্দু** এবং সুবিধাজনক যে কোনো দৈর্ঘ্যকে **একক** ধরে সরলরেখাটিকে সংখ্যারেখায় রূপান্তরিত করা যায়। মূলবিন্দুকে O দ্বারা সূচিত করা হয়। মূলবিন্দুর ডানে অবস্থিত বিন্দুগুলির প্রত্যেকটির প্রতিরূপী সংখ্যা ধনাত্মক এবং মূলবিন্দুর বামে অবস্থিত প্রত্যেকটির প্রতিরূপী সংখ্যা ঋণাত্মক। মূল বিন্দুর প্রতিরূপী সংখ্যা 0 (শূন্য)। বিভিন্ন বিন্দুর প্রতিরূপী সংখ্যা সর্বদা বিভিন্ন। বিপরীতক্রমে, সংখ্যারেখায় প্রতিটি বাস্তব সংখ্যার প্রতিরূপী একটি ও কেবল একটি মাত্র বিন্দু রয়েছে। সংখ্যারেখায় অবস্থিত নতুন কোনো বিন্দু P এর প্রতিরূপী সংখ্যাকে, গৃহীত মূলবিন্দু ও দৈর্ঘ্যের এককের প্রেক্ষিতে P বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** বলা হয়। মূলবিন্দু বা দৈর্ঘ্যের একক পরিবর্তন করলে একই বিন্দুর স্থানাঙ্ক পরিবর্তিত হয়ে যায়। অতএব, স্থানাঙ্ক শুধু বিন্দুটির উপর নয়, বরং মূলবিন্দুর অবস্থানের এবং দৈর্ঘ্যের এককের উপরও নির্ভরশীল। মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক 0; মূল বিন্দুর ডানে অবস্থিত প্রত্যেকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক ধনাত্মক এবং মূলবিন্দুর বামে অবস্থিত প্রত্যেকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক ঋণাত্মক।

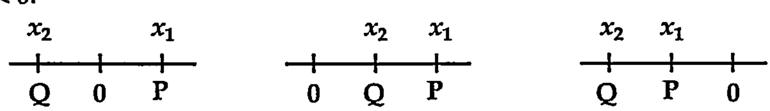
উদা. সংখ্যারেখায় P, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক x_1, x_2 হলে দেখাও যে, বিন্দু দুইটির দূরত্ব $= |x_1 - x_2|$

PQ রেখাংশের দৈর্ঘ্যই হচ্ছে P, Q বিন্দু দুইটির দূরত্ব, অর্থাৎ P ও Q একই বিন্দু হলে $x_1 = x_2$; সুতরাং তখন দূরত্ব $= 0 = |x_1 - x_2|$

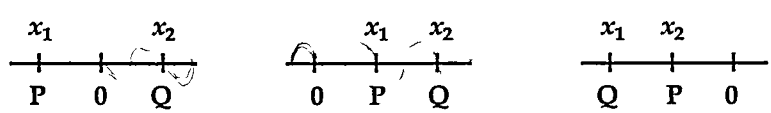
P, Q বিভিন্ন বিন্দু হলে হয় $x_1 > x_2$ না হয় $x_2 > x_1$.

প্রথম ক্ষেত্রে দূরত্ব $= x_1 - x_2 = |x_1 - x_2|$; দ্বিতীয় ক্ষেত্রে দূরত্ব $= x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2) = |x_1 - x_2|$, কেননা তখন $x_1 - x_2 < 0$.

প্রথম ক্ষেত্র ঃ



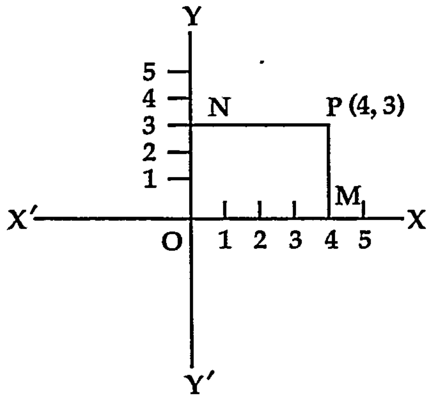
দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ



সমতলে আয়ত (কার্তেসীয়) স্থানাঙ্ক ঃ সমতলে একটি অনুভূমিক সরলরেখা XOX′ নিয়ে একে মূলবিন্দু O বিশিষ্ট সংখ্যারেখায় রূপান্তর করি যেন ধনাত্মক সংখ্যাগুলি মূলবিন্দুর ডানদিকে এবং ঋণাত্মক সংখ্যাগুলি মূলবিন্দুর বাম দিকে থাকে। O বিন্দুতে XOX′ রেখার উপর লম্ব YOY′ সরলরেখা আঁকি। একেও মূলবিন্দু O বিশিষ্ট সংখ্যারেখায় রূপান্তর করি যেন ধনাত্মক সংখ্যাগুলি মূলবিন্দুর উপরের দিকে এবং ঋণাত্মক সংখ্যাগুলি মূলবিন্দুর নিচের দিকে থাকে।

XOX′ ও YOY′ রেখাদ্বয় সমতলকে XOY, YOX′, X′OY′ এবং Y′OX এই চারটি অংশে বিভক্ত করে। এদেরকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্ভাগ (quadrants) বলা হয়। XOX′, YOY′ রেখা যুগলকে আয়ত কার্তেসীয় **অক্ষজোট** বলা হয়।

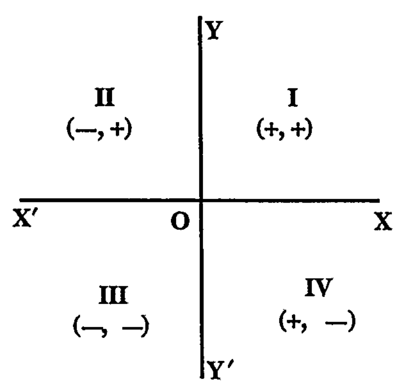
মনে করি P ঐ সমতলের যে কোনো বিন্দু। P বিন্দু থেকে XOX′ রেখার উপর লম্ব PM এবং YOY′ রেখার উপর লম্ব PN আঁকি। XOX′ সংখ্যারেখায় M বিন্দুর স্থানাঙ্ক মনে করি x ; YOY′ সংখ্যারেখায় N বিন্দুর স্থানাঙ্ক মনে করি y. x-কে P বিন্দুর **ভুজ** (abscissa) এবং y-কে P বিন্দুর **কোটি** (ordinate) বলা হয়। (x, y) ক্রমজোড়কে গৃহীত অক্ষজোটের প্রেক্ষিতে P বিন্দুর **আয়ত কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক** (Rectangular Cartesian coordinates) বা সংক্ষেপে শুধু স্থানাঙ্ক বলা হয়। এভাবে সমগ্র সমতলের প্রত্যেকটি বিন্দুর প্রতিরূপ একটি ক্রমজোড় পাওয়া যায় যার প্রথম ও দ্বিতীয় পদ বা অংশক (component) উভয়েই বাস্তব সংখ্যা। সমতলের বিভিন্ন বিন্দুর প্রতিরূপী ক্রমজোড় সর্বদা বিভিন্ন হবে। কেননা, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং P′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y') এবং $P \neq P'$ হলে $x \neq x'$, অথবা $y \neq y'$ (এখানে 'অথবা' যুক্তিবিজ্ঞানের অর্থ বহন করে। অর্থাৎ অথবা দ্বারা এবং/অথবা বুঝায়)। সুতরাং ক্রমজোড় হিসেবে $(x, y) \neq (x', y')$. বিপরীতক্রমে $(x, y) \neq (x', y')$ হলে $P \neq P'$ হবে, কেননা, ক্রমজোড়ের সমতার সংজ্ঞানুযায়ী $(x,y) \Leftrightarrow x = x'$ এবং $y = y'$.



বিপরীতক্রমে, বাস্তব সংখ্যার প্রত্যেকটি ক্রমজোড়ের প্রতিরূপী একটি ও কেবলমাত্র একটি বিন্দু P′ সমতলে রয়েছে যার স্থানাঙ্ক (x, y) রয়েছে। P-এর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য আমরা XOX′ সংখ্যারেখায় x-এর প্রতিরূপী বিন্দু M এবং YOY′ সংখ্যারেখায় y-এর প্রতিরূপী বিন্দু N চিহ্নিত করি। M বিন্দু দিয়ে YOY′ রেখায় সমান্তরাল রেখা এবং N বিন্দু দিয়ে XOX′ রেখায় সমান্তরাল রেখা আঁকি। এ রেখাদ্বয় মনে করি P বিন্দুতে ছেদ করে। তখন গৃহীত অক্ষজোটের প্রেক্ষিতে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে (x, y). অতএব প্রদত্ত ক্রমজোড়ের প্রতিরূপী বিন্দু নির্ণীত হলো। XOX′ রেখাকে x-অক্ষ এবং YOY′ রেখাকে y-অক্ষ বলা হয়।

P বিন্দুর অবস্থানের উপর ভুজ ও কোটির চিহ্ন নির্ভর করে। চিহ্ন সংক্রান্ত নিয়মগুলি ছকের আকারে এবং চিত্রের মাধ্যমে দেখানো হলো ঃ

চতুর্ভাগ	ভুজের চিহ্ন	কোটির চিহ্ন
প্রথম	+	+
দ্বিতীয়	–	+
তৃতীয়	–	–
চতুর্থ	+	–



বাস্তব সংখ্যার সকল ক্রমজোড়ের সেটকে $R \times R$ দ্বারা সূচিত করা হয়, অর্থাৎ $R \times R = \{(x, y) = x \in R, y \in R\}$

সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের অবতারণার ফলে সমতলে সকল বিন্দুর সেটকে $R \times R$ সেটের জ্যামিতিক প্রতিরূপ হিসেবে গণ্য করা যায়। এজন্যই A, B যে কোনো সেট হলে $A \times B$-কে কার্তেসীয় গুণজ সেট বলা হয়।

দ্রষ্টব্য ঃ $P(x, y)$ লিখলে বুঝায় যে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

বিভিন্ন চতুর্ভাগে (x, y)-এর চিহ্ন নির্ণয় করার নিয়ম নিচে দেয়া হলো।

(i) প্রথম চতুর্ভাগে x ও y উভয়ই ধনাত্মক

(ii) দ্বিতীয় চতুর্ভাগে x ঋণাত্মক কিন্তু y ধনাত্মক

(iii) তৃতীয় চতুর্ভাগে x ও y উভয়ই ঋণাত্মক

(iv) চতুর্থ চতুর্ভাগে x ধনাত্মক, y ঋণাত্মক।

উদাহরণস্বরূপ বলা যায় $(-3, 4)$ বিন্দুটির ভুজ ঋণাত্মক কিন্তু কোটি ধনাত্মক। অতএব, বিন্দুটির অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে। $(-3, 4)$ একটি ক্রমজোড় এবং এই ক্রমজোড়টি $(4, -3)$ থেকে ভিন্ন ; কেননা, $(4, -3)$ এমন একটি বিন্দু নির্দেশ করে যার ভুজ 4 এবং কোটি -3 এবং বিন্দুটির অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে। অনুরূপভাবে, $(3, -4)$ আর একটি ক্রমজোড়। এই ক্রমজোড়টি যে বিন্দুটিকে নির্দেশ করে তারও অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে। বিন্দুটির ভুজ 3 কিন্তু কোটি -4. অতএব, দেখা যাচ্ছে, $(-3, 4), (4, -3), (3, -4)$ প্রভৃতি ক্রমজোড়গুলি ভিন্ন এবং কার্তেসীয় সমতলে ক্রমজোড়গুলি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু নির্দেশ করে। সবগুলি ক্রমজোড়ই $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ গুণজ সেটের সদস্য। এভাবে দেখান যায় যে $(-4, -5)$, $(-5, -4), (4, -5), (-4, 5)$ প্রভৃতি ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড় এবং প্রতিটি ক্রমজোড়ই কার্তেসীয় সমতলে ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু নির্দেশ করে। প্রথম ও দ্বিতীয় বিন্দুটির অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে, তৃতীয় বিন্দুটির অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে এবং চতুর্থ বিন্দুটির অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে। অতএব দেখা যাচ্ছে, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ কার্তেসীয় সমতলে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেয়া থাকলে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য ঃ নিচের বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক বিশেষভাবে মনে রাখতে হবে ঃ

(i) মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)

(ii) x-অক্ষরেখার উপর যে কোনো বিন্দুর কোটি শূন্য। অর্থাৎ, যে সমস্ত ক্রমজোড় x-অক্ষের উপরিস্থিত বিন্দুসমূহ নির্দেশ করে তাদের সবগুলির দ্বিতীয় পদ শূন্য হবে। যেমন, $(3, 0), (-3, 0), (5, 0), (-7, 0)$ প্রভৃতি সবগুলি বিন্দুই x-অক্ষের উপরে অবস্থিত।

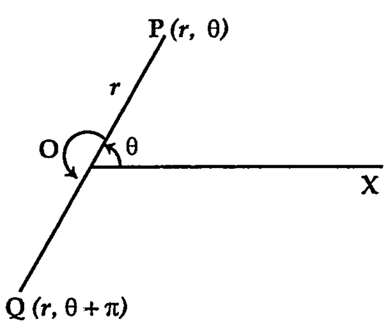
(iii) y-অক্ষরেখার উপর যে কোনো বিন্দুর ভুজ শূন্য। স্পষ্টতই যে ক্রমজোড়গুলি y-অক্ষরেখার উপরিস্থিত বিন্দু নির্দেশ করে তাদের প্রথম পদ শূন্য। যেমন $(0, 7), (0, -9), \left(0, \frac{3}{4}\right)$ প্রভৃতি সবগুলি বিন্দুই y-অক্ষের উপরে অবস্থিত।

3. পোলার স্থানাঙ্ক (Polar Coordinates)

কোনো সমতলে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করতে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ছাড়াও আর এক প্রকার স্থানাঙ্ক ব্যবহার করা হয়। একে পোলার স্থানাঙ্ক বলা হয়। মনে করি, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং O বিন্দু থেকে OX একটি রশ্মি টানা হলো। এখন $OP = r$ এবং $\angle XOP = \theta$ কোণের পরিমাপ জানতে পারলে P বিন্দুর অবস্থান জানা যাবে।

(r, θ)-কে P বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক বলে। এখানে r-কে বলা হয় ব্যাসার্ধ ভেক্টর (radius vector) এবং θ কোণকে বলা হয় ভেক্টোরিয়াল কোণ (vectorial angle)। O-কে মূলবিন্দু বা পোল এবং OX-কে আদি রেখা বা মূল রেখা (initial line) বলা হয়।

মনে করি একটি রশ্মি O-কে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OX-অবস্থান হতে OP-এর উপর এসে মিলিত হয়। যদি $\angle XOP$ কোণ θ-এর সমান হয় এবং PO-কে Q পর্যন্ত বর্ধিত করা হয় যেন $OQ = OP$, তবে $(r, \theta + \pi)$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্দেশ করে। উল্লেখ্য যে সর্বদা $r > 0$ ধরা হয়।

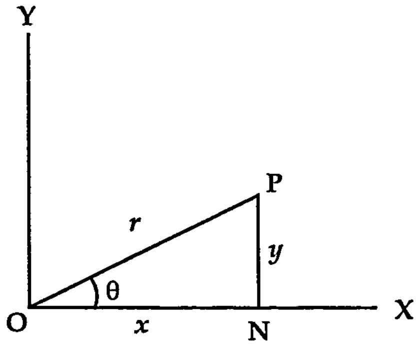


দ্রষ্টব্য ঃ মূলবিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (0, 0) ; অর্থাৎ ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও ভেক্টোরিয়াল কোণ উভয়ই শূন্য।

মন্তব্য ঃ নাম ব্যাসার্ধ ভেক্টর হলেও এটি একটি স্কেলার রাশি।

4. কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক

XOX′, YOY′ অক্ষজোট নিয়ে সমতলে কার্তেসীয় (আয়ত) স্থানাঙ্কের অবতারণা করি। আবার O-কে মূলবিন্দু এবং OX-কে মূলরেখা ধরে একই সমতলে পোলার স্থানাঙ্কের অবতারণা করি।



মনে করি P সমতলের যে কোনো বিন্দু এবং গৃহীত কার্তেসীয় অক্ষজোটের প্রেক্ষিতে এর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং গৃহীত মূল রেখার প্রেক্ষিতে পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ). তা হলে $\angle XOP = \theta$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী

$$\cos\theta = \frac{\text{P বিন্দুর ভুজ}}{\text{ব্যাসার্ধ ভেক্টর}} = \frac{x}{r} \text{ এবং}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{P বিন্দুর কোটি}}{\text{ব্যাসার্ধ ভেক্টর}} = \frac{y}{r}$$

অতএব, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ … … … (1)

ফলে $x^2 + y^2 = r^2(\cos\theta)^2 + r^2(\sin\theta)^2$

$= r^2(\cos^2\theta + \sin\theta)$

$= r^2.1 = r^2$

সুতরাং $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ … … … (2)

$x \neq 0$ হলে $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{y}{x}$ … … … (3)

দ্রষ্টব্য : $x = 0$ হলে $\theta = 90°$ যখন $y > 0$ এবং $\theta = 270°$ যখন $y < 0$.

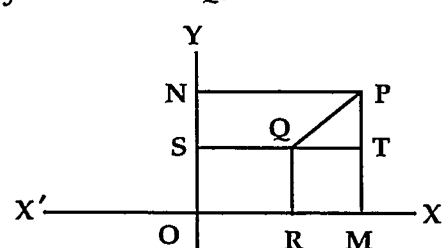
সমীকরণ (1) পোলার স্থানাঙ্কের মাধ্যমে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক প্রকাশ করে। সমীকরণ (2) এবং সমীকরণ (3) কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের মাধ্যমে পোলার স্থানাঙ্ক প্রকাশ করে।

মন্তব্য : $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ সম্পর্ক হতে সাবধানতা অবলম্বনের প্রয়োজন হতে পারে, কেননা এই সমীকরণ থেকে θ এর দুইটি মান পাওয়া যায় যাদের অন্তর 180°. P বিন্দুর অবস্থান কোন্ চতুর্ভাগে তার প্রতি লক্ষ রেখে θ-এর সঠিক মান নির্ণয় করতে হয় যেন $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ খাটে। উদাহরণস্বরূপ P(1, 1) হলে $\theta = 45°$;
P(−1, −1) হলে $\theta = 225°$.

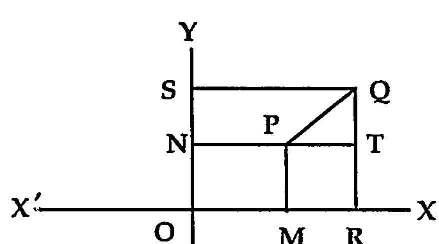
5. দূরত্ব সূত্র—দুইটি বিন্দুর দূরত্ব (Distance between two points)

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ সমতলের যে কোনো দুইটি বিন্দু হলে এদের দূরত্ব $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

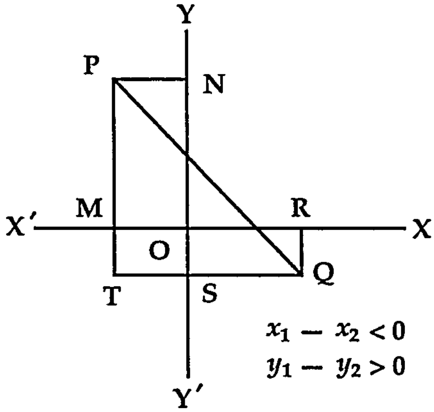
P বিন্দু হতে X অক্ষের উপর লম্ব PM এবং y অক্ষের উপর লম্ব PN আঁকি। Q বিন্দু হতে x অক্ষের উপর লম্ব QR এবং y-অক্ষের উপর লম্ব QS আঁকি।

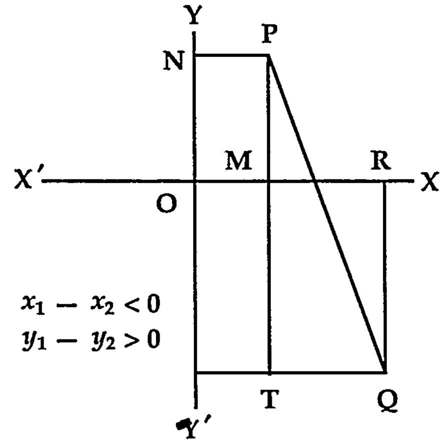


$x_1 - x_2 > 0$
$y_1 - y_2 > 0$



$x_1 - x_2 < 0$
$y_1 - y_2 < 0$





PM, MN, QR, QS রেখা চারটির একটিকে প্রয়োজনে বর্ধিত করে সমকোণী ত্রিভুজ PTQ পাওয়া যায়, যার অতিভুজ PQ (কোন্ রেখাটি নিতে হবে তা P ও Q বিন্দুর পারস্পরিক অবস্থানের উপর নির্ভর করে)।

সকল ক্ষেত্রেই PTQ সমকোণী ত্রিভুজের অনুভূমিক বাহুর দৈর্ঘ্য $|x_1 - x_2|$ এবং উল্লম্ব বাহুর দৈর্ঘ্য $|y_1 - y_2|$.

অতএব $PQ^2 = PT^2 + QT^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$

$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

বিশেষ ক্ষেত্র ঃ মূলবিন্দু (0, 0) থেকে (x_1, y_1) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

উদাহরণমালা

উদা. 1. কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(-1, \sqrt{3})$ হলে, বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

এখানে, $r^2 = x^2 + y^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \qquad \therefore \quad r = 2$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \qquad \therefore \quad \theta = 120^\circ$ বা, 300°

প্রদত্ত বিন্দুটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। সুতরাং $\theta = 120^\circ$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(2, 120^\circ)$

উদা. 2. কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(3, 90^\circ)$ হলে, বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

এখানে $x = r\cos\theta = 3\cos 90^\circ = 0$

$y = r\sin\theta = 3\sin 90^\circ = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (0, 3)

উদা. 3. কার্তেসীয় সমীকরণগুলিকে পোলার সমীকরণে এবং পোলার সমীকরণগুলিকে কার্তেসীয় সমীকরণে পরিণত কর।

(i) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$; (ii) $y = x\tan\alpha$; (iii) $r = 2a\cos\theta$; (iv) $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$

সমাধান ঃ

(i) $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

বা, $r^2 - 2ar\cos\theta = 0 \qquad [\because x^2 + y^2 = r^2]$

বা, $r^2 = 2ar\cos\theta$

বা, $r = 2a\cos\theta$ (উত্তর)

(ii) $y = x\tan\alpha$

বা, $r\sin\theta = r\cos\theta\tan\alpha$

বা, $\tan\theta = \tan\alpha$ বা, $\theta = \alpha$ (উত্তর)

(iii) $r = 2a\cos\theta$

বা, $r^2 = 2ar\cos\theta$

বা, $x^2 + y^2 = 2ax$

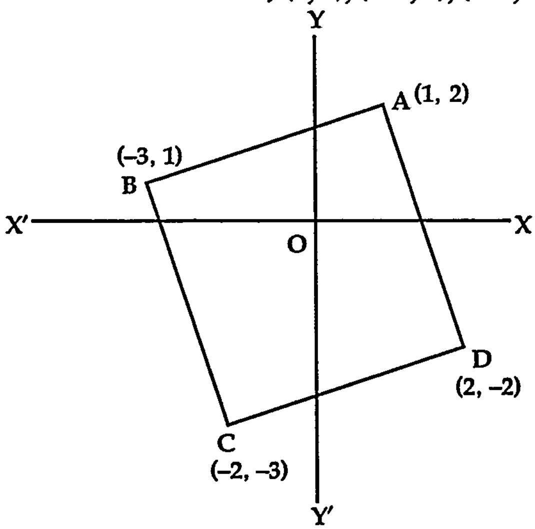
বা, $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ (উত্তর)

(iv) $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$

বা, $2r\sin\theta\, r\cos\theta = 2a^2$

বা, $xy = a^2$ (উত্তর)

উদা 4. প্রমাণ কর যে, (1, 2), (– 3, 1), (– 2,– 3) এবং (2, – 2) বিন্দুগুলি একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।



(বিন্দুগুলি স্থাপন করে ABCD চিত্রটি আঁকা হলো।)

এখানে $AB^2 = (1+3)^2 + (2-1)^2 = 17$

$BC^2 = (-3+2)^2 + (1+3)^2 = 17$

$CD^2 = (-2-2)^2 + (-3+2)^2 = 17$

$DA^2 = (2-1)^2 + (-2-2)^2 = 17$

এবং $AC^2 = (1+2)^2 + (2+3)^2 = 34$

$\therefore$ $AB = BC = CD = DA$

চারটি বাহু সমান বলে ABCD চতুর্ভুজটি বর্গ বা রম্বস হতে পারে। কিন্তু $AC^2 = AB^2 + BC^2$, সুতরাং $\angle ABC$ সমকোণ।

$\therefore$ ABCD একটি বর্গ।

মন্তব্য ঃ প্রশ্নটি সমাধানের জন্য চিত্রটি আঁকা অপরিহার্য নয়।

উদা. 5. x-অক্ষ ও (– 5, – 7) থেকে (4, k) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে k-এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৯]

x-অক্ষ থেকে (4, k) বিন্দুটির দূরত্ব = $|k|$

(– 5, – 7) থেকে (4, k)-এর দূরত্ব $= \sqrt{(-5-4)^2 + (-7-k)^2}$

$= \sqrt{81 + 49 + 14k + k^2}$

$= \sqrt{130 + 14k + k^2}$

শর্তানুসারে $k^2 + 14k + 130 = k^2$

বা, $14k + 130 = 0$

বা, $k = -\dfrac{65}{7}$ (উত্তর)

প্রশ্নমালা IA

1. কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক থেকে পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ঃ
(i) $(-1, -\sqrt{3})$ (ii) $(-\sqrt{3}, 1)$ (iii) $(1, 1)$ (iv) $(5, -5)$

উত্তর ঃ (i) $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ (ii) $(2, 150°)$ (iii) $(\sqrt{2}, 45°)$ (iv) $\left(5\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

2. পোলার স্থানাঙ্ক থেকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ঃ

(i) $(1, 225°)$ (ii) $(2, 270°)$ (iii) $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ (iv) $\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

উত্তর ঃ (i) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $(0, -2)$ (iii) $(2, 2\sqrt{3})$ (iv) $(-1, -1)$.

3. পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর ঃ

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ উত্তর ঃ $r = a$

(ii) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ উত্তর ঃ $r^2 = a^2 \sin 2\theta$

(iii) $x^2 - y^2 = a^2$ উত্তর ঃ $r^2 \cos 2\theta = a^2$

4. কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর ঃ

(i) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ উত্তর ঃ $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$

(ii) $r(1 + \cos\theta) = 2$ [কু. বো. ২০০৮] উত্তর ঃ $y^2 = -4(x-1)$

(iii) $r = a \sin\theta$ উত্তর ঃ $x^2 + y^2 - ay = 0$

5. নিচের বিন্দুগুলির মধ্যকার দূরত্ব নির্ণয় কর ঃ (i) $(4, -7)$ এবং $(-1, 5)$ (ii) (a, b) এবং (b, a) (iii) $(at^2, 2at)$ এবং $\left(\frac{a}{t^2}, -\frac{2a}{t}\right)$ উত্তর ঃ (i) 13 (ii) $(a-b)\sqrt{2}$ (iii) $a\left(t + \frac{1}{t}\right)^2$

6. দেখাও যে, (4, 2), (7, 5) এবং (9, 7) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

7. দেখাও যে, (–5, 3) এবং (15, –9) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায়।

8. দেখাও যে, (3, 8), (8, 3) এবং (–2, 3) বিন্দু তিনটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

9. প্রমাণ কর যে, (1, 3), (5, 0), (2, –4) এবং (–2, –1) বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু।

10. প্রমাণ কর যে, (2, –2), (8, 4), (5, 7) এবং (–1, 1) বিন্দুগুলি একটি আয়তের শীর্ষবিন্দু।

11. প্রমাণ কর যে, (–2, –1), (1, 0), (4, 3) এবং (1, 2) এই চারটি বিন্দু একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

12. দেখাও যে, (a, a), $(-a, -a)$ এবং $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

13. (i) (0, 0), (0, 8) এবং (4, 0) একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ (2, 4)

(ii) একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, – 4) এবং (0, 4) হলে তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৫] উত্তর ঃ $(4\sqrt{3}, 0)$, $(-4\sqrt{3}, 0)$

14. দেখাও যে, (3, –5), (9, 10), (3, 25) এবং (–3, 10) বিন্দু চারটি একটি রম্বসের শীর্ষবিন্দু।

15. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (5, 3) ; এর যে জ্যা (3, 2) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১১ (তুলনীয়); কু. বো. ২০১০] উত্তর ঃ $4\sqrt{5}$

16. প্রমাণ কর যে, (12, 8), (–2, 6) এবং (6, 0) বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

17. দেখাও যে, (4, 4), (5, 2) এবং (1, 0) বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ 5 বর্গ একক।

18. P বিন্দু A(1, –1), B(9, 7), C(1, 7) বিন্দু তিনটি হতে সমদূরবর্তী হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ (5, 3)

19. দেখাও যে, P(7, 7), Q(6, –2) এবং R(2, 3) বিন্দু তিনটি একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

20. x-অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে (0, 2) ও (6, 4) বিন্দু দুইটি সমদূরবর্তী হলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ (4, 0)

21. যদি (x, y) বিন্দু থেকে $(3, 5)$ এবং $(-6, -9)$ বিন্দু দুইটির দূরত্ব সমান হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $18x + 28y + 83 = 0$.

22. প্রমাণ কর যে, $(-1, 5), (6, -2), (7, -1)$ এবং $(0, -2)$ এই চারটি বিন্দু একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত, যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, 2)$.

23. কোনো বিন্দুর কোটি 3 এবং বিন্দুটির দূরত্ব $(5, 3)$ থেকে 4 একক হলে বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর।

[কু. বো. ২০১১] উত্তর ঃ 9 অথবা 1

24. (x, y) বিন্দুটি $(a + b, b - a)$ এবং $(a - b, a + b)$ বিন্দু দুইটি থেকে সমান দূরে হলে, প্রমাণ কর যে, $bx = ay$.

25. একটি বিন্দুর কোটি এর ভুজের দ্বিগুণ ; যদি এর দূরত্ব $(4, 3)$ থেকে $\sqrt{10}$ একক হয়, তবে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১; রা. ২০০৭, ২০০২; মা. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০৫] উত্তর ঃ $(3, 6)$; $(1, 2)$

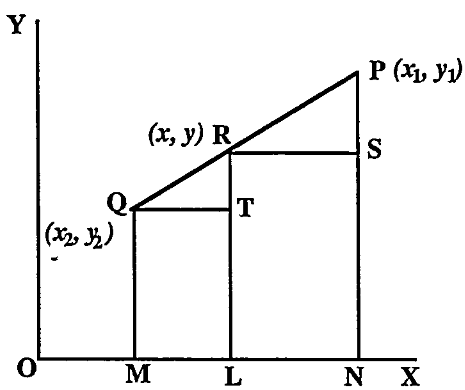
26. y-অক্ষ ও $(7, 2)$ থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে a-এর মান নির্ণয় কর।

[রা. বো. ২০১০, ২০০৪; য. বো. ২০১০, ২০০৬; চ. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০৭ ; সি. বো. ২০০৩] উত্তর ঃ $\frac{29}{7}$

6. বিভক্তিকরণ সূত্র (Division formula)

দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ কোনো বিন্দুতে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হলে, বিভক্তি-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

(i) অন্তর্বিভক্তি ঃ মনে করি $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু এবং R বিন্দু PQ রেখাংশকে এরূপভাবে অন্তর্বিভক্ত করেছে যেন $\frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2}$



মনে করি R বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) ; x, y-এর মান নির্ণয় করতে হবে।

OX-এর উপর PN, QM, RL লম্ব টানি। আবার PN, RL-এর উপর যথাক্রমে RS, QT লম্ব আঁকি। এখানে, PRS, RQT ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।

$$\therefore \frac{RS}{QT} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$RS = LN = ON - OL = x_1 - x$

$QT = ML = OL - OM = x - x_2$

$\therefore$ (1) থেকে পাই, $\frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{m_1}{m_2}$

অথবা, $m_1x - m_1x_2 = m_2x_1 - m_2x$

অথবা, $(m_1 + m_2)x = m_1x_2 + m_2x_1$

$$\therefore \quad x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

অনুরূপভাবে, $\frac{PS}{RT} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2}$

অর্থাৎ $\frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \therefore \; y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

অনুপাত সূত্রে লক্ষ করি যে, PR অংশের সাথে অন্বয় যুক্ত m_1-কে Q-এর স্থানাঙ্ক দ্বারা গুণ করা হয়েছে। আবার RQ অংশের সাথে অন্বয়যুক্ত m_2-কে P-এর স্থানাঙ্ক দ্বারা গুণ করা হয়েছে।

অনুসি. 1. যদি PQ-কে R বিন্দু এমনভাবে বিভক্ত করে যে,

PR ঃ RQ = k ঃ 1, তাহলে

$x = \frac{x_1 + kx_2}{k+1}$ এবং $y = \frac{y_1 + ky_2}{k+1}$

অনুসি. 2. যদি PQ-কে R বিন্দু সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে $m_1 = m_2$

$\therefore \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

(ii) বহির্বিভক্তি ঃ মনে করি, R বিন্দু PQ রেখাংশকে এমনভাবে বহির্বিভক্ত করে যে $\frac{PR}{QR} = \frac{m_1}{m_2}$

এখন PRS, QRT ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ

$\therefore \frac{RS}{RT} = \frac{PR}{QR} = \frac{m_1}{m_2}$

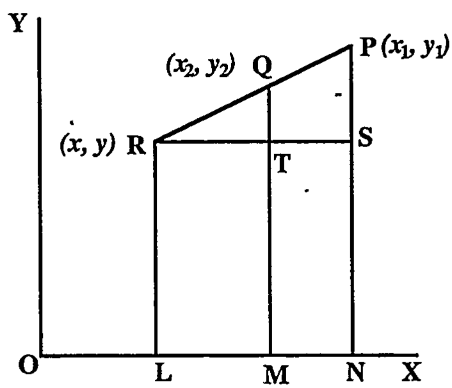
অথবা, $\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{m_1}{m_2}$

$\therefore \quad x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2} \quad \dots \quad \dots \quad (4)$

অনুরূপভাবে, $\frac{PS}{QT} = \frac{PR}{QR} = \frac{m_1}{m_2}$

অথবা, $\frac{y_1 - y}{y_2 - y} = \frac{m_1}{m_2}$

$\therefore \quad y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2} \quad \dots \quad (5)$



মন্তব্য ঃ বিভক্তিকরণ সূত্রগুলি P ও Q বিন্দুর সকল অবস্থানের জন্য প্রযোজ্য, যদিও প্রমাণের সময় বিন্দু দুইটির একটি মাত্র বিশেষ অবস্থান দেখানো হয়েছে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. (1, 4) এবং (9, − 12) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি 5 ঃ 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

বিন্দুটি (x, y) হলে, $x = \frac{5 \times 9 + 3 \times 1}{5+3} = \frac{48}{8} = 6$, $y = \frac{5 \times (-12) + 3 \times 4}{5+3} = -\frac{48}{8} = -6$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু (6, − 6)

উদা. 2. (4, − 5) এবং (6, 8) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি 4 ঃ 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $x = \frac{4 \times 6 - 3 \times 4}{4-3} = 24 - 12 = 12$

$$y = \frac{4 \times 8 - 3 \times (-5)}{4-3} = 32 + 15 = 47$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু (12, 47)

উদা. 3. (3, 2) এবং (6, 8) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের (i) সমদ্বিখণ্ডন বিন্দু এবং (ii) সমত্রিখণ্ডন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(i) সমদ্বিখণ্ডন বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $x = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2}$ এবং $y = \frac{2+8}{2} = 5$ $\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\left(\frac{9}{2}, 5\right)$

(ii) মনে করি P(3, 2), Q(6, 8) রেখাকে R ও S বিন্দু দুইটি সমান তিনভাগে ভাগ করে। অতএব PR = RS = SQ। এখন R বিন্দু PQ রেখাকে 1 ঃ 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1.6+2.3}{1+2}, \frac{1.8+2.2}{1+2}\right) = (4, 4)$

আবার, S বিন্দুটি PQ রেখাকে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2\times6+1\times3}{2+1}, \frac{2\times8+1\times2}{2+1}\right) = (5, 6)$

উদা. 4. A(− 1, 2) ও B(3, − 4) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাকে x-অক্ষ রেখা ও y-অক্ষরেখা যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

A বিন্দুটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে এবং B বিন্দুটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। সুতরাং AB রেখাংশ উভয় অক্ষরেখাকে ছেদ করে। মনে করি x অক্ষরেখা AB রেখাংশকে m_1 ঃ m_2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। বিভক্তি বিন্দুর কোটি

$$y = \frac{m_1\times3+m_2\times(-1)}{m_1+m_2} = \frac{3m_1-m_2}{m_1+m_2}$$

বিভক্তি বিন্দুটি x অক্ষরেখায় অবস্থিত বিধায় $y = 0.$

সুতরাং $3m_1 = m_2$

অতএব $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$

আবার মনে করি y অক্ষরেখা AB রেখাংশকে $x_1 = x_2$ অনুপাতে বিভক্ত করে। বিভক্তি বিন্দুর ভুজ

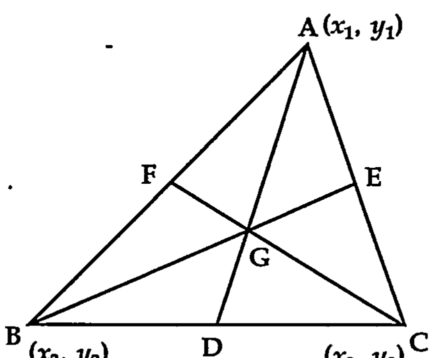
$$x = \frac{n_1\times(-4)+n_2\times2}{n_1+n_2} = \frac{-4n_1+2n_2}{n_1+2}$$

বিভক্তি বিন্দুটি y অক্ষরেখায় অবস্থিত বিধায় $x = 0$

সুতরাং $4n_1 = 2n_2$ অতএব, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}$

অতএব x অক্ষরেখা AB রেখাংশকে 1 ঃ 2 অনুপাতে এবং y অক্ষরেখা AB রেখাংশকে 1 ঃ 3 অনুপাতে বিভক্ত করে। (উত্তর)

উদা. 5. ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু, এই উপপাদ্যের বিশ্লেষণী প্রমাণ দাও।



মনে করি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। যদি BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ধরা হয়, তাহলে D-এর স্থানাঙ্ক হবে $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$। মনে করি G বিন্দু AD মধ্যমাকে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং তার স্থানাঙ্ক (x, y) ; তাহলে,

$$x = \frac{2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}+1\cdot x_1}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}+1\cdot y_1}{2+1} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

AD মধ্যমা যে বিন্দুতে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ আবার BE, CF মধ্যমা যে বিন্দুতে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত, তার স্থানাঙ্ক একই; অর্থাৎ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ বিন্দুটি প্রত্যেকটি মধ্যমার উপর অবস্থিত।

∴ মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু এবং ঐ বিন্দু প্রত্যেক মধ্যমাকে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

সংজ্ঞা ঃ মধ্যমা তিনটির ছেদবিন্দুকে ভরকেন্দ্র (centroid) বলে। ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) হলে ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

প্রশ্নমালা IB

1. (2, 3) এবং (9, 10) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দু 1 ঃ 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\left(\frac{13}{3}, \frac{16}{3}\right)$

2. এমন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যা (– 4, 3) এবং (1, – 2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে 2 ঃ 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। উত্তর ঃ (– 2, 1)

3. (– 1, 2) এবং (4, – 5) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে যে বিন্দুটি 2 ঃ 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ (– 11, 16)

4. এমন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর, যা (1, 2) এবং (3, 1) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে 1 ঃ 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে। উত্তর ঃ $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$; (–1, 3)

5. AB সরলরেখাটি P(3, 3) এবং Q(8, 5) বিন্দু দুইটি দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত করা হয় ; A ও B-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১১] উত্তর ঃ A(– 2, 1), B(13, 7)

6. (7, 5) ও (– 2, – 1) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১, ২০০৯; ব. বো. ২০০৫] উত্তর ঃ (4, 3) ও (1, 1)

7. দেখাও যে, (2, – 2) ও (– 1, 4) বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে অক্ষরেখা দুইটি সমান তিনভাগে ভাগ করে। [ব. বো. ২০০৭ ; সি. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৫]

8. (1, 2) ও (6, 7) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে (3, 4) বিন্দুটি যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। উত্তর ঃ 2 ঃ 3

9. (7, 7) ও (– 5, – 10) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ রেখা যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা বের কর ; বিভাজন বিন্দুটির ভুজ বের কর। [সি. বো. ২০১১, ২০০৭; য. বো. ২০০৮; রা. বো. ২০০৬, ২০০৩; কু. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০২; মা. বো. ২০১১, ২০০৩] উত্তর ঃ 7 ঃ 10; $\frac{35}{17}$

10. (2, – 4) ও (– 3, 6) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y-অক্ষরেখা যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৯, ২০০০; রা. বো. ২০০৮, ২০০৪, ২০০১; য. বো. ২০০২] উত্তর ঃ 2 ঃ 3 ; 2 ঃ 3

11. দেখাও যে, মূল বিন্দু (– 3, – 2) ও (6, 4) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের একটি ত্রিখণ্ডন বিন্দু , অপর সমত্রিখণ্ডন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৮, ২০০২] উত্তর ঃ (3, 2)

12. (– 6, 8) ও (8, – 6) বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে সমান চারভাগে বিভক্ত করা হয় ; বিভাজন বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$; (1, 1) ; $\left(\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

13. (1, – 1), (– 1, 1), (√3, √3) বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

14. একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (2, 7) এবং (6, 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (6, 4) ; তৃতীয় শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০১; মা. বো. ২০১১, ২০০৭] উত্তর ঃ (10, 4)

15. ABCD আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(3, 2), B(2, – 1), C(8, – 3)। এর চতুর্থ শীর্ষবিন্দু D-এর স্থানাঙ্ক এবং আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০২; মা. বো. ২০০১] উত্তরঃ (9, 0); 20 বর্গ একক।

16. A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (– 2, 4) এবং (4, – 5)। AB রেখাংশ C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন AB = 3BC। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৫; সি. বো. ২০১০; দি. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০৯, ২০০২; ঢা. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৬] উত্তর ঃ (6, – 8)

17. দেখাও যে, (1, 1), (– 4, 13), (8, 8) এবং (13, – 4) এই চারটি বিন্দু একটি রম্বসের শীর্ষ বিন্দু। [দি. বো. ২০১১]

18. যদি A(2, 5), B(5, 9) এবং D (6, 8) বিন্দু তিনটি ABCD রম্বসের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দু C-এর স্থানাঙ্ক এবং রম্বসটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১০, ২০০৫; ব. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৯] উত্তর ঃ (9, 12) ; 7 বর্গ একক।

19. কোনো সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (3, – 4) এবং (– 6, 5)। এর তৃতীয় শীর্ষ বিন্দু (– 2, – 1) হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১১; দি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৭ ; কু. বো. ২০০৬, ২০০৪; সি. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; চ. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০০] উত্তর ঃ (– 1, 2)

20. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুগুলির মধ্য বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 4), (5, 0), (4, – 2) ; শীর্ষবিন্দু A, B, C-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ A(7, – 6), B(1, 2), C(3, 6)

21. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক A(5, 6), B(– 3, 2), C(– 8, – 5) এবং D বিন্দু BC-এর মধ্যবিন্দু ; G বিন্দু AD রেখাংশকে এরূপভাবে অন্তর্বিভক্ত কর যেন AG ঃ GD = 2 ঃ 1 হয়। G-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [মা. বো. ২০০২] উত্তর ঃ (– 2, 1)

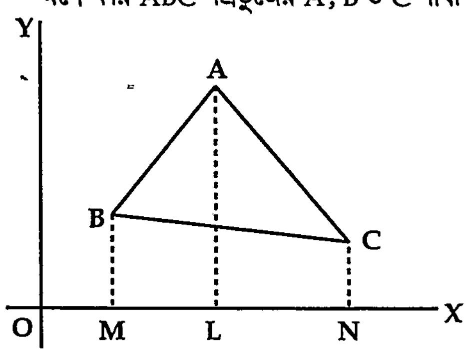
22. স্থানাঙ্কের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা এর তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

23. A(8, 10), B(18, 20) বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে Q এবং R বিন্দু দুইটি 2 ঃ 3 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে। Q এবং R-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং P বিন্দু AB-এর মধ্যবিন্দু হলে দেখাও যে, $PQ.PR = PB^2$। [রা. বো. ২০০০] উত্তর ঃ (12, 14), (– 12, – 10)

7. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a Triangle)

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক দেয়া আছে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3).



A, B ও C হতে x-অক্ষের উপর AL, BM এবং CN লম্ব আঁকা হলো। তাহলে, $OL = x_1$, $OM = x_2$, $ON = x_3$, $AL = y_1$, $BM = y_2$ এবং $CN = y_3$. ধরা যাক ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ΔABC; তাহলে ΔABC = ট্রাপিজিয়ম ABML + ট্রাপিজিয়ম ALNC – ট্রাপিজিয়ম BMNC.

যেহেতু ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহু দুইটির যোগফল) × সমান্তরাল বাহু দুইটির লম্ব-দূরত্ব, সেহেতু

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}(AL + BM) \times ML + \frac{1}{2}(AL + CN) \times LN - \frac{1}{2}(BM + CN) \times MN$$

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[y_1 \{(x_1 - x_2) + (x_3 - x_1)\} + y_2 \{(x_1 - x_2) - (x_3 - x_2)\} + y_3 \{(x_3 - x_1) - (x_3 - x_2)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1)]$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)\} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(i)-এর ডান পক্ষকে নির্ণায়কে প্রকাশ করলে আমরা পাই,

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

দ্রষ্টব্য ঃ (i) (1)-এর ডান পক্ষের পদগুলিকে পুনর্বিন্যাস করে সূত্রটিকে নিম্নের আকারে লেখা যায়।

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(ii) ক্ষেত্রফল কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না; কিন্তু (1) বা (2) এর ডান পক্ষের রাশিমালার মান ক্ষেত্রবিশেষে ঋণাত্মক হতে পারে। তখন, রাশিটির চিহ্ন বর্জিত মান অর্থাৎ পরম মানই হবে কাঙ্ক্ষিত ক্ষেত্রফল। A, B, C বিন্দু তিনটির ক্রম ঘড়ির কাটার বিপরীতমুখী হলে রাশিমালাটির মান ধনাত্মক এবং ঘড়ির কাটার সমমুখী হলে মান ঋণাত্মক হবে।

(iii) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হবে যদি এবং কেবল যদি তাদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়। অতএব, বিন্দু তিনটি সমরেখ হওয়ার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত হলো ঃ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ বা, } x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

(iv) $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ এবং $(0, 0)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$

উদাহরণমালা

উদা. 1. A, B, C বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, bc), (b, ca), (c, ab)$ হলে, দেখাও যে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}(b-c)(c-a)(a-b)$ হবে।

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & bc & 1 \\ b & ca & 1 \\ c & ab & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{a(ca - ab) + b(ab - bc) + c(bc - ca)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)\}$$

$$= -\frac{1}{2}\{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)\}$$

$$= \frac{1}{2}(a - b)(b - c)(c - a) \text{ (প্রমাণিত)}$$

উদা. 2. $(1, -2), (3, 3)$ ও $(-3, 2)$ বিন্দুগুলিকে শীর্ষবিন্দু ধরে যে ত্রিভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\{1(3-2) + 3(2+2) - 3(-2-3)\}$

$= \frac{1}{2} \times 28 = 14$ বর্গ একক।

উদা. 3. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি A $(-3, -2)$, B $(-3, 9)$ এবং C $(5, -8)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA-এর উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

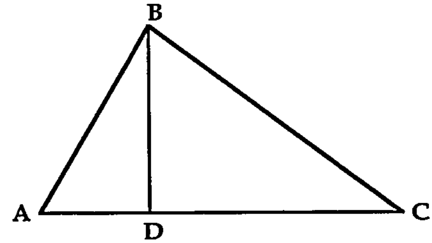
[চ. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৪; য. বো. ২০০৪]

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -3 & 9 & 1 \\ 5 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{-3(9+8) + 2(-3-5) + 1(24-45)\}$$

$$= \frac{1}{2}(-51 - 16 - 21)$$

$$= \frac{1}{2}(-88) = -44$$



ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= 44$ বর্গ একক। (উত্তর-১)

$CA = \sqrt{(5+3)^2 + (-8+2)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

$\Delta ABC = \frac{1}{2} CA.BD$, যেখানে BD, শীর্ষবিন্দু B থেকে CA-এর উপর পতিত লম্বের দৈর্ঘ্য।

$\therefore \frac{1}{2} \times 10\,BD = 44$ বা, $5\,BD = 44$

$\therefore BD = \frac{44}{5} = 8\frac{4}{5}$ একক। (উত্তর-২)

উদা. 4. দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে $(at_1^2, 2at_1)$ $(at_2^2, 2at_2)$, $(at_3^2, 2at_3)$ এবং $\{at_2t_3, a(t_2+t_3)\}$, $\{at_3t_1, a(t_3+t_1)\}$, $\{at_1t_2, a(t_1+t_2)\}$। দেখাও যে, প্রথম ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল দ্বিতীয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

$$\Delta_1 = \text{প্রথম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} at_1^2 & 2at_1 & 1 \\ at_2^2 & 2at_2 & 1 \\ at_3^2 & 2at_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{at_1^2(2at_2 - 2at_3) + at_2^2(2at_3 - 2at_1) + at_3^2(2at_1 - 2at_2)\}$$

$$= a^2\{t_1^2(t_2 - t_3) + t_2^2(t_3 - t_1) + t_3^2(t_1 - t_2)\}$$

$$= -a^2(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$$

$$\Delta_2 = \text{দ্বিতীয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} at_2t_3 & a(t_2+t_3) & 1 \\ at_3t_1 & a(t_3+t_1) & 1 \\ at_1t_2 & a(t_1+t_2) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[at_2t_3\{a(t_3+t_1) - a(t_1+t_2)\} + at_3t_1\{a(t_1+t_2) - a(t_2+t_3)\} + at_1t_2\{a(t_2+t_3) - a(t_3+t_1)\}]$$

$$= \frac{1}{2}\{a^2t_2t_3(t_3 - t_2) + a^2t_3t_1(t_1 - t_3) + a^2t_1t_2(t_2 - t_1)\}$$

$$= -\frac{a^2}{2}(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$$

সুতরাং $\Delta_1 = 2\Delta_2$ (প্রমাণিত)

প্রশ্নমালা IC

1. নিচের বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ঃ

(i) $(0, 0)$, $(3, 3)$ ও $(3, -5)$ — উত্তর ঃ 12 বর্গ একক

(ii) $(-4, 3)$, $(-1, -2)$ ও $(3, -2)$ — উত্তর ঃ 10 বর্গ একক।

(iii) (a, a^2), (b, b^2) ও (c, c^2) — উত্তর ঃ $\frac{1}{2}\{a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)\}$

(iv) $(1, 0)$, $(2, 1)$ ও $(4, 5)$ — উত্তর ঃ 1 বর্গ একক।

2. দুইটি অক্ষরেখা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে ; A ও B-এর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দেয়া আছে। মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ হবে।

[ঢা. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; য. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০২]

3. দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) এবং (x_1+h, y_1+k), (x_2+h, y_2+k), (x_3+h, y_3+k)। দেখাও যে, ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

4. দেখাও যে, $(-1, 3)$, $(2, 9)$ ও $(-3, -1)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

5. a-এর মান কত হলে $(a, 2-2a)$, $(1-a, 2a)$ ও $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত হবে? **[ঢা. বো. ২০১১; সি. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯, ২০০১; য. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০১; রা. বো. ২০০০]** উত্তর ঃ $-1, \frac{1}{2}$

6. $\left(2, \frac{3}{2}\right), \left(-3, -\frac{7}{2}\right)$ ও $\left(x, \frac{9}{2}\right)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে, x-এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর : 5

7. যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $(a^2, bc), (b^2, ca)$ ও (c^2, ab) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হবে।

8. ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5, 6), (-9, 1)$ ও $(-3, -1)$. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বের কর এবং এর সাহায্যে A থেকে BC-এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[চ. বো. ২০১০, ২০০৫; দি. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০০; য. বো. ২০০৭ ; মা. বো. ২০০৬, ২০০৩] উত্তর : 29 বর্গ একক, $\frac{29}{10}\sqrt{10}$ একক।

9. OPQ ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক $(0, 0), (a\cos\beta, -a\sin\beta)$ এবং $(a\sin\alpha, a\cos\alpha)$. দেখাও যে, $\alpha=\beta$ হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের মান সবচেয়ে বড় হবে এবং সবচেয়ে বড় মানটি বের কর। উত্তর : $\frac{1}{2}a^2$

[ব. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৩ , ২০০১]

10. প্রমাণ কর যে, $(p, p-2), (p+3, p)$ এবং $(p+2, p+2)$ বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে। [কু. বো. ২০০৮; মা. বো. ২০১০, ২০০৪]

11. A, B, C, D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, -1), (15, 2)$ $(-1, 2)$ ও $(4, -5)$; CD-কে AB-রেখাটি যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০১১; ব. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০১] উত্তর : 2 : 3.

12. ABC ত্রিভুজে A, B, C শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 5), (-3, 3), (-1, -1)$ এবং D, E, F যথাক্রমে BC, CA, AB-এর মধ্যবিন্দু। ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $\Delta ABC = 4.\Delta DEF$. [ব. বো. ২০০৫] উত্তর : 14 বর্গ একক, $\frac{7}{2}$ বর্গ একক।

13. দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে $(3, 0), (0, 7), (1, 1)$ এবং $(13, 3), (2, 3), (-11, 2)$. দেখাও যে, ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান এবং তাদের ভরকেন্দ্র একই বিন্দু।

14. ABC ত্রিভুজের A, B, C শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, -3), (13, 0), (-2, 9)$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর এমনভাবে স্থাপিত যেন $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=2$। ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তাদের অনুপাত 3 : 1 হবে। [রা. বো. ২০০২] উত্তর : 63 বর্গ একক, 21 বর্গ একক।

15. A, B, C, D বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(t-4, -2), (t, t+3), (2t+1, 1), (t-3, 1)$ এবং O মূলবিন্দু। Δ OAB : ΔOCD-এর অনুপাত নির্ণয় কর এবং এটি থেকে দেখাও যে, $t=4$ হলে ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফলের মান সমান হবে।

উত্তর : $t-3$.

16. একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t+1, 1), (2t+1, 3)$ $(2t+2, 2t)$. তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $t=2$ অথবা, $t=-\frac{1}{2}$ হলে, ঐ বিন্দুগুলি সমরেখ হবে। [সি. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০১; রা. বো. ২০১০, ২০০৮; কু. বো. ২০১০, ২০০৩; ব. বো. ২০১০, ২০০৭ ; ঢা. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০১] উত্তর : $\frac{1}{2}(2t^2-3t-2)$

17. ABC ত্রিভুজে A, B, C শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক $(-1, 2), (2, 3)$ ও $(3, -4)$; P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, দেখাও যে, $\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC}=\frac{x-3y+7}{22}$. [কু. বো. ২০০৭]

18. যদি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি A (x, y), B $(1, 2)$ এবং C $(2, 1)$ হয় এবং তার ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক হয়, তবে দেখাও যে, $x+y=15$. [রা. বো. ২০১১, ২০০৬; য. বো. ২০১১, ২০০১; ব. বো. ২০০৯, ২০০৪, ২০০২; ঢা. বো. ২০০২]

19. কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $(2, -1), (a+1, a-3), (a+2, a)$ হলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। a-এর মান কত হলে বিন্দুগুলি সমরেখ হবে ? [চ. বো. ২০০৭ ; সি. বো. ২০০৬; কু. বো. ২০০১] উত্তর : $\frac{1}{2}(2a-1), a=\frac{1}{2}$

20. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$, যদি এর ভরকেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে দেখাও যে, $t_1+t_2+t_3=0$.

[য. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৩, ২০০১; ব. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০৯]

21. দেখাও যে, $(3, 90°)$ এবং $(3, 30°)$ শীর্ষবিশিষ্ট বিন্দু দুইটি মূলবিন্দুর সঙ্গে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

22. যদি $A(3, 4)$, $B(2t, 5)$, $C(6, t)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হয়, তবে t-এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৩ ; কু. বো. ২০০০] উত্তর ঃ $-2, \frac{15}{2}$

23. $(-2, 3), (-3, -4), (5, -1)$ ও $(2, 2)$ বিন্দু চারটি ক্রমান্বয়ে নিয়ে যে চতুর্ভুজ গঠিত হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর ঃ 31 বর্গ একক।

24. একটি চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে $(a, 0), (-b, 0), (0, a)$ $(0, -b)$. দেখাও যে এর ক্ষেত্রফল শূন্য; এর ব্যাখ্যা দাও।

25. ABCD একটি চতুর্ভুজ। এর কৌণিক বিন্দু A, B, C, D-এর স্থানাঙ্ক $(1, 2), (-5, 6), (7, -4)$ এবং $(k, -2)$. ক্ষেত্রফল শূন্য হলে, k-এর মান নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $k = 3$

26. ABCD সামান্তরিকের A, B, C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 2), (3, 4), (1, 0)$ হলে (i) D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (ii) AC ও BD এর ছেদ বিন্দু এবং (iii) সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল বের কর।

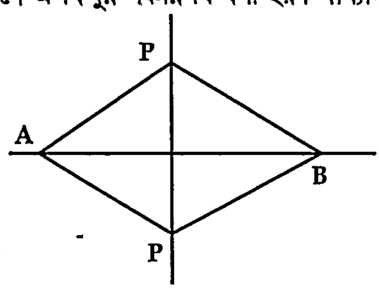
উত্তর ঃ (i) $(-1, -2)$ (ii) $(1, 1)$ (iii) 4 বর্গ একক।

27. A, B, C ও D-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -8), (-3, 4), (0, 7)$ ও $(3, 16)$। AB-কে CD রেখাংশটি যে অনুপাতে ভাগ করে তা বের কর এবং CD-কে AB রেখাংশটি যে অনুপাতে বিভক্ত করে তাও নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ 3 ঃ 1 ; 2 ঃ 5 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

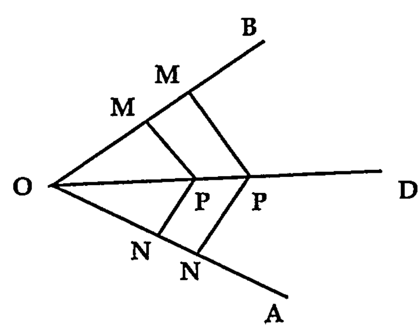
৪. সঞ্চারপথ (Locus)

কোনো সমতলে এক বা একাধিক শর্তাধীনে চলমান কোনো বিন্দু যে সরল বা বক্ররেখায় সঞ্চরণ করে তাকে প্রদত্ত শর্তাধীনে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ বলা হয়। মাধ্যমিক জ্যামিতি থেকে আমরা নিচের তিনটি সঞ্চারপথের সাথে পরিচিত।



(i) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A, B থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ AB রেখাংশের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখা। এখানে PA = PB শর্তাধীনে P বিন্দু চলমান, যেখানে PA ও PB যথাক্রমে P বিন্দু হতে A ও B বিন্দুর দূরত্ব বুঝায়।

(ii) একটি নির্দিষ্ট কোণ ∠AOB-এর বাহু দুইটি হতে যে চলমান বিন্দু P-এর লম্ব দূরত্ব সমান, তার সঞ্চারপথ উক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা। এখানে PM = PN শর্তাধীনে P বিন্দু চলমান যেখানে PN ও PM P বিন্দু হতে OA ও OB বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য বুঝায়।



(iii) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্র ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু এবং যার ব্যাসার্ধ ঐ নির্দিষ্ট দূরত্ব a.

এখানে $OP = a$ শর্তাধীনে P বিন্দু চলমান।

মন্তব্য ঃ (i) সেটের ভাষায় বলা যায়, সমতলের যে সকল বিন্দু কোনো প্রদত্ত শর্ত বা শর্তাবলি পূরণ করে তাদের সেট একটি সঞ্চারপথ। সঞ্চারপথের প্রত্যেক বিন্দু প্রদত্ত ঐ শর্ত বা শর্তাবলি পূরণ করে এবং সঞ্চারপথের বহির্ভূত কোনো বিন্দু ঐ শর্ত বা শর্তাবলি পূরণ করে না।

(ii) প্রদত্ত শর্ত অথবা শর্তসমূহ থেকে সঞ্চারপথ নির্দেশক সেটের যে কোনো বিন্দুর (উপাদানের) x ও y-স্থানাঙ্কের মধ্যে একটি বীজগণিতীয় সম্বন্ধ পাওয়া যায়। সেটের প্রতিটি বিন্দুর স্থানাঙ্কসমূহ এই বীজগণিতী সম্বন্ধটি মেনে চলে। এই বীজগণিতীয় সম্বন্ধটিই সঞ্চারপথের সমীকরণ। সুতরাং, সঞ্চারপথের যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা তার সমীকরণ সিদ্ধ হবে। বিপরীত ক্রমে, কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা যদি কোনো সঞ্চারপথের সমীকর সিদ্ধ হয়, তাহলে উক্ত বিন্দু অবশ্যই সঞ্চারপথে থাকবে।

প্রদত্ত শর্ত অথবা শর্তসমূহের তারতম্য অনুসারে সঞ্চারপথ সরলরেখা বা অন্য কোনো বক্র রেখা হতে পারে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. এমন একটি সঞ্চারপথের সমীকরণ বের কর যা দুইটি প্রদত্ত বিন্দু $(b, 0)$ এবং $(-b, 0)$ থেকে সর্বদা সমদূরবর্তী $(b \neq 0)$.

মনে করি A $(b, 0)$, B $(-b, 0)$ এবং P (x, y) সঞ্চারপথের যে কোনো বিন্দু। প্রশ্নানুযায়ী,

$PA = PB \quad \therefore \; PA^2 = PB^2$

বা, $(x-b)^2 + y^2 = (x+b)^2 + y^2$

বা, $(x+b)^2 - (x-b)^2 = 0$

বা, $4bx = 0$ বা, $x = 0$

নির্ণেয় সঞ্চারপথটি y-অক্ষ।

দ্রষ্টব্য : এটি পূর্বে আলোচিত সঞ্চারপথ (i)-এর বিশেষ ক্ষেত্র।

উদা. 2. মূলবিন্দু থেকে যে সকল বিন্দুর দূরত্ব একটি ধ্রুবক a-এর সমান সেই সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণ কর।

মনে করি O মূলবিন্দু এবং P (x, y) সঞ্চারপথের যে কোনো একটি উপাদান।

প্রশ্নানুযায়ী, $OP = a$ বা, $OP^2 = a^2$

বা, $(x-0)^2 + (y-0)^2 = a^2$

বা, $x^2 + y^2 = a^2$. এটিই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : এটি পূর্বে আলোচিত সঞ্চারপথ (iii)-এর বিশেষ ক্ষেত্র।

উদা. 3. মূলবিন্দু এবং $(0, 4)$ বিন্দু থেকে যে সকল বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 2 : 3, তাদের সঞ্চারপথে সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে করি, P (x, y) নির্ণেয় সঞ্চারপথের যে কোনো একটি বিন্দু।

$(0, 0)$ বিন্দু থেকে (x, y)-এর দূরত্ব $= \sqrt{x^2 + y^2}$

$(0, 4)$ বিন্দু থেকে (x, y)-এর দূরত্ব $= \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$

প্রশ্নানুযায়ী, $\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y-4)^2}} = \dfrac{2}{3}$

বা, $9x^2 + 9y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 32y + 64$

বা, $5x^2 + 5y^2 + 32y - 64 = 0$ (উত্তর)

প্রশ্নমালা ID

1. একটি সেটের বিন্দুসমূহের x-অক্ষ থেকে দূরত্ব y-অক্ষ হতে তাদের দূরত্বের চার গুণ। সঞ্চারপথের সমীকর নির্ণয় কর। উত্তর : $y = 4$

2. একটি সেট এমনভাবে গঠন করা হয়েছে যে, $(b, 0)$ বিন্দু থেকে সেটটির যে কোনো বিন্দুর দূরত্ব y-অ রেখাংশ থেকে এর দূরত্বের সমান। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা. বো. ২০০১] উত্তর : $y^2 - 2bx + b^2 =$

3. $(3, 0)$ ও $(-4, 0)$ বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট যে সঞ্চারপথ গঠন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $2x + 1 = 0$

4. $(a, 0)$ বিন্দু ও $x + a = 0$ রেখাংশ n থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট যে সঞ্চারপথ গঠন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $y^2 = 4ax$

5. $(2, 0)$ বিন্দু থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব $x = 0$ রেখা থেকে তাদের দূরত্বের তিন গুণ। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৯] উত্তর : $y^2 - 8x^2 - 4x + 4 = 0$

6. A $(0, 4)$ এবং B $(0, 6)$ দুইটি স্থির বিন্দু। কার্তেসীয় সমতলে বিন্দুসমূহের এমন একটি সেট গঠন করা হয়েছে যে AB রেখাংশ ঐ সেটের যে কোনো বিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে। সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৩] উত্তর : $x^2 + y^2 - 10y + 24 = 0$

7. $(a, 0)$ এবং $(0, a)$ বিন্দু দুইটি থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহ দূরত্বের বর্গের অন্তরফল সর্বদা $2a$. সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৮, ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০৭; মা. বো. ২০০২] উত্তর : $y = x \pm 1$

8. A $(2, 3)$ এবং B $(-1, 4)$ দুইটি স্থির বিন্দু। একটি সেট এমনভাবে গঠন করা হয়েছে যে A এবং B বিন্দু থেকে সেটের যে কোনো বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 2 : 3. সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[চ. বো. ২০১১, ২০০৪; দি. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০৫;
ঢা. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০৫] উত্তর : $5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0.$

9. O, A, B, C-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, 0), (3, 5), (2, 6), (x, y)$; B ও C বিন্দু দুইটি OA-রেখার একই পাশে অবস্থিত। (x, y) বিন্দুটি যদি একটি সেটের সদস্য হয় যার প্রতিটি বিন্দুর জন্য $\Delta OAC = 2\Delta\, OAB$ তবে দেখাও যে, সঞ্চারপথের সমীকরণ $5x - 3y + 16 = 0$.

10. একটি সেটের প্রতিটি বিন্দু B $(1, 1)$ ও C $(-1, -1)$ বিন্দু দুইটির সঙ্গে এমন একটি ত্রিভুজ গঠন করে যার ক্ষেত্রফল 5 বর্গ একক। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - y = \pm 5$

11. A (x, y), B $(-6, -3)$ এবং C $(6, 3)$ বিন্দুগুলি একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। A বিন্দুটি এমন একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যে কোনো বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য একটি স্থির সংখ্যা 5. দেখাও যে সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$. [দি. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০২; সি. বো. ২০০১]

12. A, B, C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$, $(-a, 0)$ এবং $(c, 0)$. এমনভাবে একটি সেট গঠন করা হয়েছে যে এর যে কোনো বিন্দু P (x, y) এর জন্য $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$. P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $2cx = c^2 - a^2$

13. একটি সেট এমনভাবে গঠন করা হয়েছে যে y-অক্ষরেখা থেকে এর যে কোনো বিন্দুর দূরত্ব, মূল বিন্দু থেকে তার দূরত্বের অর্ধেক। সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। উত্তর : $3x^2 = y^2$

14. A, B, C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, -3), (2, 5), (-3, 1)$. P (x, y) বিন্দু এমন একটি সেটের সদস্য যার প্রতিটি বিন্দুর জন্য $\Delta\, PBC = \frac{1}{4}\Delta\, ABC$. সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর : $4x - 5y + 5 = 0$

15. $(2a, 0)$ বিন্দু এবং y-অক্ষরেখা থেকে একটি সেটের বিন্দুগুলির দূরত্ব সমান। সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।
উত্তর : $y^2 = 4a\,(x - a)$

16. x-অক্ষ থেকে একটি সেটের প্রতিটি বিন্দুর দূরত্বের বর্গ, y-অক্ষ থেকে বিন্দুটির দূরত্বের $4a$ গুণ। সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। উত্তর : $y^2 = 4ax.$

17. একটি সেটের যে কোন উপাদান A ও B বিন্দুর সাথে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। $A(a, b)$ এবং B $(0, b)$ হলে সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১০, ২০০৪] উত্তর : $x^2 + y^2 - ax - 2by + b^2 = 0$

18. $(2, -1)$ বিন্দু থেকে যে সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব 4 একক সেই সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।
[রা. বো. ২০০৫] উত্তর : $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$

দ্বিতীয় অধ্যায়

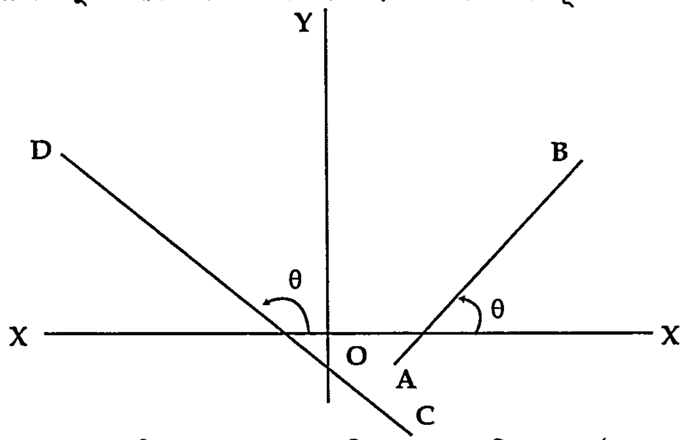
সরলরেখা

THE STRAIGHT LINE

9. সরলরেখার ঢাল (Slope of a straight line)

কোনো সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেন্টকে সরলরেখাটির ঢাল বলে এবং ঢালকে সাধারণত m দ্বারা সূচিত করা হয়।

চিত্রে, মনে করি AB রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ তৈরি করে ($0° < \theta < 90°$). এই θ কোণের ত্রিকোণমিতিক tan অনুপাত AB রেখার ঢাল এবং এই ঢালকে m দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ AB রেখার



ঢাল $m = \tan\theta$; আবার CD রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যদি θ কোণ উৎপন্ন করে ($90° < \theta < 180°$), তাহলে, $m = \tan\theta$. প্রথম ক্ষেত্রে $m > 0$ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $m < 0$.

উদাহরণ ঃ (i) কোনো সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে $60°$ কোণ উৎপন্ন করলে এর ঢাল হবে $m = \tan 60° = \sqrt{3}$. (ii) কোনো সরলরেখা x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করলে ধনাত্মক দিকের সাথে কোণটি হবে $180° - 45°$; রেখাটির ঢাল হবে, $m = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

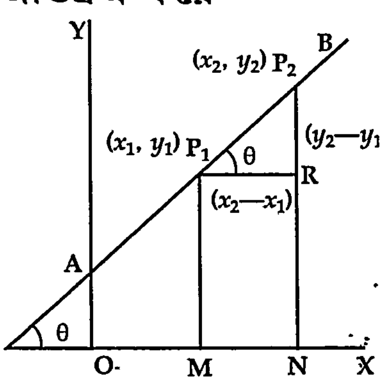
স্মরণ রাখতে হবে যে, কোনো সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করার জন্য রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ তৈরি করে সে কোণটিই বিবেচনা করতে হবে অর্থাৎ সে কোণটির ত্রিকোণমিতিক tan-ই হবে রেখাটির ঢাল।

দ্রষ্টব্য ঃ (i) y অক্ষের সমান্তরাল কোনো রেখার ঢাল সংজ্ঞায়িত নয়।

(ii) $m = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ বা, $180° \Leftrightarrow$ সরলরেখাটি x অক্ষের সমান্তারাল।

(iii) দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল সমান। বিপরীতক্রমে দুইটি সরলরেখার ঢাল সমান হলে তারা সমান্তরাল হবে।

10. একটি সরলরেখার ঢাল বের করতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে



মনে করি, AB সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এবং $P_1(x_1, y_1)$ ও $P_2(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। x-অক্ষের উপর P_1M ও P_2N লম্ব এবং P_2N-এর উপর P_1R লম্ব আঁকা হল। এখন, $P_1R = MN = ON - OM = x_2 - x_1$ এবং

$P_2R = P_2N - RN = P_2N - P_1M = y_2 - y_1$

যেহেতু, $\theta = \angle XTB = \angle P_2P_1R$

$\therefore\ m = $ AB রেখার ঢাল $= \tan\theta = \tan P_2P_1R$

$$= \frac{P_2R}{P_1R} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\text{কোটি দুইটির অন্তর}}{\text{ভুজ দুইটির অন্তর}}$$

উদাহরণস্বরূপ বলা যায় একটি সরলরেখা $(5, 7)$ ও $(2, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে, রেখাটির ঢাল $\frac{7-4}{5-2} = \frac{3}{3} = 1.$

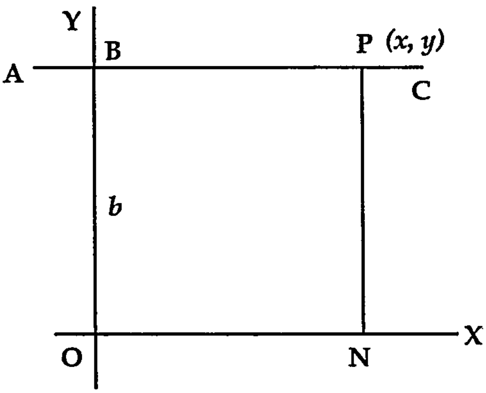
সুতরাং রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করলে আমরা পাই, $\tan\theta = 1$ বা, $\theta = 45°$.

দ্রষ্টব্য ঃ $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে, যদি এবং কেবল যদি P_1P_2 এবং $_1P_3$ রেখা দুইটির ঢাল একই হয়। সুতরাং, বিন্দু তিনটি সমরেখ হওয়ার শর্ত,

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}, \text{ যেখানে } x_1 \neq x_2, x_3$$

.1. x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা

মনে করি, AC একটি x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা যা y-অক্ষ রেখাকে B বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং $OB = b$.



মনে করি, $P(x, y)$ সরলরেখার উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দু। OX-এর উপর PN লম্ব আঁকা হল। তাহলে, $PN = OB = b$ অর্থাৎ, $y = b$ এই সমীকরণটি AC রেখার উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দুর জন্য সত্য এবং তার বাইরের অন্য কোনো বিন্দুর জন্য সত্য নয়। অর্থাৎ, AC সরলরেখা এমন বিন্দুসমূহের সেট, OX রেখা থেকে যাদের লম্ব দূরত্ব সব সময় b । এই সেটটি যে সঞ্চারপথ গঠন করে তা x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা যা x-অক্ষ থেকে b একক দূরে অবস্থিত।

সুতরাং সরলরেখাটির সমীকরণ $y = b$.

দ্রষ্টব্য ঃ b ধনাত্মক হলে সরলরেখাটি x-অক্ষের b একক উপরে এবং b ঋণাত্মক হলে রেখাটি x-অক্ষের b একক নিচে অবস্থিত হবে।

$b = 0$ হলে, সরলরেখাটি x-অক্ষের সঙ্গে মিলে যাবে।

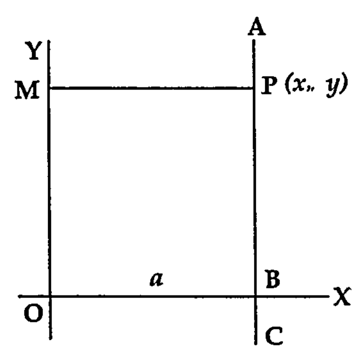
$\therefore$ **x-অক্ষের সমীকরণ** $y = 0$.

.2. y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা

y-অক্ষরেখার সমান্তরাল AC একটি সরলরেখা আঁকা হল যেন এটি x-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে এবং $OB = a$. তাহলে পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের ন্যায় দেখানো যায় যে, y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা যা এই অক্ষরেখা থেকে a একক দূরে অবস্থিত তার সমীকরণ $x = a$.

a ধনাত্মক হলে, সরলরেখাটি y-অক্ষের a একক ডানে এবং a ঋণাত্মক হলে রেখাটি y-অক্ষের a একক বামে অবস্থিত হবে। $a = 0$ হলে সরলরেখাটি y-অক্ষের সাথে মিলে যাবে।

$\therefore$ **y-অক্ষের সমীকরণ** $x = 0$.



উদাহরণস্বরূপ বলা যায় (i) $x = 3$ সমীকরণটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং ডানদিকে 3 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাটি নির্দেশ করে।

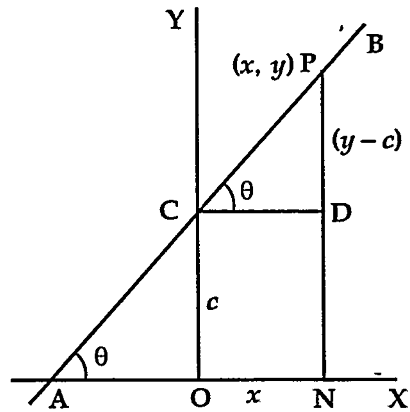
(ii) $3x + 5 = 0$ অথবা, $x = -\frac{5}{3}$ সমীকরণটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং এর বাম দিকে $\frac{5}{3}$ একক দূরে অবস্থিত রেখাটিকে সূচিত করে।

(iii) $3y + 4 = 0$ অথবা, $y = -\frac{4}{3}$ সমীকরণটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং এর নিচের দিকে $\frac{4}{3}$ একক দূরে অবস্থিত সরলরেখা সূচিত করে।

13. সরলরেখার প্রমিত সমীকরণসমূহ (Standard equations of a straight line)

(A) একটি সরলরেখার সমীকরণ বের করতে হবে যা y-অক্ষ থেকে একটি নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করে এবং x-অক্ষের সাথে একটি ধনাত্মক কোণ উৎপন্ন করে (m, c-আকার)

মনে করি, AB সরলরেখাটি y-অক্ষ থেকে $OC = c$ অংশ ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে $\theta\ (\neq 90°)$ কোণ উৎপন্ন করে। মনে করি AB সরলরেখার উপর P একটি বিন্দু এবং এর স্থানাঙ্ক (x, y) ; x-অক্ষের উপর PN লম্ব এবং PN-এর উপর CD লম্ব আঁকা হলো।



এখন, $\tan\theta = \tan PCD = \dfrac{PD}{CD} = \dfrac{PN - CO}{ON} = \dfrac{y-c}{x}$

$\therefore\ y = x\tan\theta + c$

অথবা, $y = mx + c$, যেখানে $m = \tan\theta$। এই সমীকরণটিকে ঢাল সমীকরণ বলে।

দ্রষ্টব্য ঃ (i) লক্ষণীয় যে সরলরেখাটির ঢাল m এবং c হচ্ছে C বিন্দুর কোটি। সুতরাং c ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য হতে পারে।

(ii) m-আকৃতির সমীকরণে m-কে সর্বদাই সসীম হতে হবে।

(iii) $c = 0$ হলে সরলরেখাটি মূল বিন্দু দিয়ে যায় এবং এর সমীকরণ হয় $y = mx$.
বিপরীতক্রমে $y = mx$ সমীকরণবিশিষ্ট প্রত্যেক সরলরেখা মূল বিন্দুগামী।

(B) (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে গমনকারী m ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ

m ঢালবিশিষ্ট এবং (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে যায় (y-অক্ষের সমান্তরাল নয়) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি সরলরেখাটির সমীকরণ $y = mx + c$, যেখানে c-এর মান অজ্ঞাত। যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি সরলরেখার উপর অবস্থিত, অতএব বিন্দুটির স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হবে।

$\therefore\ y_1 = mx_1 + c \quad \Rightarrow y_1 - mx_1 = c$

সুতরাং সরলরেখাটির সমীকরণ দাঁড়ায় $y = mx + c = mx + y_1 - mx_1$

পক্ষান্তরে আমরা পাই, $y - y_1 = m(x - x_1)$; এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

(C) দুইটি বিন্দু দিয়ে গমনকারী, কোনো অক্ষরেখার সমান্তরাল নয়, এমন সরলরেখার সমীকরণ

মনে করি বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) , এখানে $x_2 \neq x_1$ এবং $y_2 \neq y_1$

নির্ণেয় সমীকরণ মনে করি,

$y = mx + c$ ... ... (1)

যেহেতু, রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে যায়, সুতরাং পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদ থেকে পাই,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ... ... (2)

যেহেতু, (2)নং রেখাটি (x_2, y_2) দিয়ে যায়, অতএব,

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \therefore m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ... ... (3)

(2)নং সমীকরণে m-এর মান প্রতিস্থাপন করে পাই,

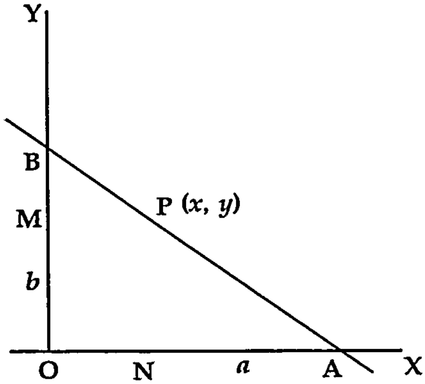
$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ... ... (4)

বা, $\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2}$ ... ... (5)

দ্রষ্টব্য ঃ (i) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি দিয়ে গমানকারী সরলরেখাটির ঢাল $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

(ii) মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগকারী রেখার সমীকরণ $\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1}$ অথবা, $y = \dfrac{y_1}{x_1}x$.

(D) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যা অক্ষ দুইটি থেকে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের অংশ ছেদ করে (ছেদক আকার)



মনে করি সরলরেখাটি x অক্ষকে A বিন্দুতে এবং y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে এবং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(b, 0)$. সুতরাং পূর্ববর্তী উপ-অনুচ্ছেদ হতে আমরা জানি $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) = \frac{b}{-a}(x - a)$$

বা, $\dfrac{y}{b} = -\dfrac{x}{a} + 1 \Rightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

দ্রষ্টব্য ঃ (i) উপরের সমীকরণটি নিচের আকারেও লেখা যায়,

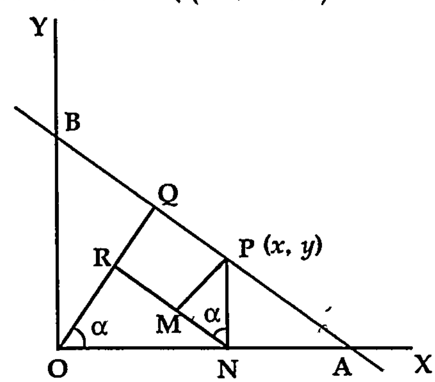
$lx + my = 1$ এখানে, $l = \dfrac{1}{a}$ এবং $m = \dfrac{1}{b}$

(ii) মূল বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার সমীকরণকে $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ আকারে প্রকাশ করা যাবে না, কেননা $(0, 0)$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

(E) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে, মূল বিন্দু থেকে যার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উক্ত লম্ব যে কোণ তৈরি করে তা দেয়া আছে (লম্ব-আকার)

মনে করি, AB নির্দিষ্ট সরলরেখা, মূল বিন্দু O থেকে AB-এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $OQ = p$ এবং $\angle XOQ = \alpha$.

মনে করি, AB-রেখার উপর $P(x, y)$ কোনো একটি বিন্দু। OX-এর উপর PN লম্ব আঁকি। OQ-এর উপর NR এবং NR-এর উপর PM লম্ব আঁকি। $\angle PNM = 90° - \angle RNO = \alpha$



$$\therefore\ p = OQ = OR + RQ = OR + PM$$
$$= ON\cos\alpha + PN\sin\alpha$$
$$= x\cos\alpha + y\sin\alpha$$

$\therefore\ x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ এটিই সরলরেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $\dfrac{OQ}{OA} = \cos\alpha\ \therefore\ OA = \dfrac{p}{\cos\alpha}$

$\dfrac{OQ}{OB} = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha\ \therefore\ OB = \dfrac{p}{\sin\alpha}$

সরলরেখার ছেদকাকৃতির সমীকরণ ব্যবহার করে পাই,

$\dfrac{x}{OA} + \dfrac{y}{OB} = 1$ অথবা, $\dfrac{x}{\dfrac{p}{\cos\alpha}} + \dfrac{y}{\dfrac{p}{\sin\alpha}} = 1$

অথবা, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.

দ্রষ্টব্য ঃ এখানে p সর্বদা ধনাত্মক ধরতে হবে।

উদাহরণ ঃ মূল বিন্দু থেকে কোনো সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 3 একক এবং তা x-অক্ষের সাথে 150° কোণ উৎপন্ন করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

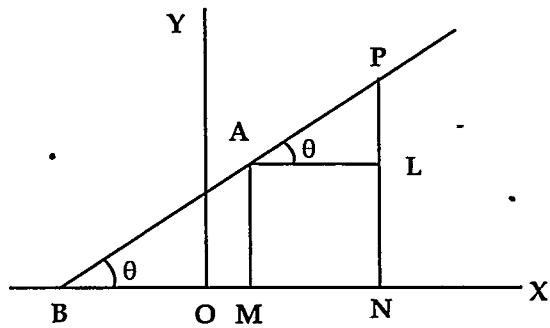
$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ এই সূত্র ব্যবহার করে সমীকরণটি হবে,

$x\cos 150° + y\sin 150° = 3$ অর্থাৎ, $x.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y.\frac{1}{2} = 3$

বা, $-\sqrt{3}x + y = 6$ বা, $y = \sqrt{3}x + 6$

(F) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যা x-অক্ষের সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) দিয়ে যায় [দূরত্ব আকার]

মনে করি A (x_1, y_1) প্রদত্ত বিন্দু এবং AB সরলরেখাটি A বিন্দুর মধ্য দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করে।



তাহলে, $\angle PBX = \theta$

মনে করি P (x, y) সরলরেখাটির উপর যে কোনো বিন্দু এবং $AP = r$.

AM ও PN, x-অক্ষের উপর লম্ব এবং AL, PN-এর উপর লম্ব আঁকা হল। অতএব, $\angle PAL = \theta$.

এখন, $AL = MN = ON - OM = x - x_1$

এবং $PL = PN - NL = PN - AM = y - y_1$

আবার, $AL = AP\cos\theta$, $PL = AP\sin\theta$

$\therefore \quad \frac{AL}{\cos\theta} = \frac{PL}{\sin\theta} = AP$

অর্থাৎ, $\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$, যেখানে (x_1, y_1) বিন্দু থেকে (x, y) যে কোনো বিন্দুর দূরত্ব r ; এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য ঃ আমরা পাই, $x = x_1 + r\cos\theta$ এবং $y = y_1 + r\sin\theta$. $\cos\theta$ এবং $\sin\theta$-কে সরলরেখাটির দিক কোসাইন বলা হয় এবং $\cos\theta = l$ এবং $\sin\theta = m$ হলে, $l^2 + m^2 = 1$.

14. $Ax + By + C = 0$ সমীকরণের সঞ্চারপথ (যেখানে A, B উভয়ে শূন্য নয়)

প্রমাণ করতে হবে যে, x এবং y সংবলিত একঘাত সমীকরণ একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। বিপরীতক্রমে যে কোনো সরলরেখা x ও y সংবলিত একঘাত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যাবে।

মনে করি, $Ax + By + C = 0$ সমীকরণটির সঞ্চারপথ Γ বক্ররেখা নির্দেশ করে। যদি $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি Γ-এর উপর অবস্থিত হয়, তবে

$Ax_1 + By_1 + C = 0,\ Ax_2 + By_2 + C = 0,\ Ax_3 + By_3 + C = 0$

A, B, C অপসারণ করে পাই,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

অতএব P_1, P_2, P_3 বিন্দু তিনটি সমরেখ। অর্থাৎ, Γ–বক্ররেখাটির উপর যে কোনো তিনটি বিন্দু একটি সরলরেখার উপর অবস্থান করে। যদি P_1 এবং P_2 বিন্দুকে স্থির রাখি তবে Γ–এর উপর যে কোনো তৃতীয় বিন্দু P_3 সর্বদাই একটি সরলরেখার উপর থাকবে। অতএব, প্রমাণিত হল যে Γ একটি সরলরেখা এবং x ও y সংবলিত একঘাত সমীকরণ সর্বদাই একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

বিপরীত প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ করার জন্য আমরা যে কোনো সরলরেখা L নিই। সরল রেখাটির উপর যে কোনো দুইটি বিন্দু $P_1(x_1, y_1)$ এবং $P_2(x_2, y_2)$ নিই। বিন্দু দুইটিকে স্থির বিন্দু ধরে সরলরেখাটির উপর যে কোনো বিন্দু (x, y) ধরি। এখন তিনটি বিন্দু সমরেখ বলে আমরা পাই,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ বা, } x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

P_1 এবং P_2 স্থির বিন্দু বলে $y_1 - y_2, x_2 - x_1$ এবং $x_1y_2 - x_2y_1$ রাশিগুলি ধ্রুবক। এগুলিকে যথাক্রমে A; B এবং C দ্বারা নির্দেশ করলে আমরা পাই,

$Ax + By + C = 0$, এখানে A, B উভয়ে শূন্য হতে পারেনা কেননা P_1, P_2 বিভিন্ন বিন্দু।

অতএব, প্রমাণিত হল যে, যে কোনো সরলরেখাকেই x, y সংবলিত একঘাত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যাবে।

15. $Ax + By + C = 0$ সমীকরণটি প্রমিত সমীকরণে রূপান্তর (যেখানে A, B উভয়ই শূন্য নয়)

$Ax + By + C = 0$ বা, $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ (m-আকার)

এখানে, $m = -\frac{A}{B}$ এবং $c = -\frac{C}{B}$, $B \neq 0$

আবার, $Ax + By + C = 0$

বা, $Ax + By = -C$

বা, $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$ (ছেদ আকার)। এখানে $a = -\frac{C}{A}$ এবং $b = -\frac{C}{B}$, $A \neq 0$, $B \neq 0$

$Ax + By + C = 0$ সমীকরণের উভয় পক্ষকে $\sqrt{A^2 + B^2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (লম্ব আকার)

এখানে, $\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ এবং $p = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

16. একই সরলরেখা নির্দেশক সমীকরণ (Equation determining the same straight line)

দুইটি সমীকরণের সঞ্চারপথ একই হওয়ার অর্থ উভয় সমীকরণের সমাধান সেট অভিন্ন হওয়া।

জ্যামিতিক ব্যাখ্যা হতে বুঝা যায় যে, $y = mx + c$ ও $y = m'x + c'$ বা, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ও $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$ বা, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$, $x\cos\alpha' + y\sin\alpha' = p'$ সমীকরণ দুইটি একই রেখা নির্দেশ করে যদি এবং কেবল যদি, যথাক্রমে $m' = m$, $c' = c$, বা $a' = a$, $b' = b$ বা $\alpha' = \alpha$, $p' = p$ হয়; অর্থাৎ প্রতিক্ষেত্রে সমীকরণ দুইটি এক হয়।

কিন্তু $ax + by + c = 0$ ও $a'x + b'y + c' = 0$ যেখানে আমরা ধরে নিতে পারি যে, a, b, c এবং a', b', c' কোনো সংখ্যাই শূন্য নয়, সমীকরণদ্বয়ে $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ না হলেও এদের নির্দেশিত সরলরেখা একই হতে পারে। এজন্য শর্ত নিম্নরূপ ঃ

$ax + by + c = 0$ এবং $a'x + b'y + c' = 0$ সমীকরণ দুইটি একই সরলরেখা নির্দেশ করে, যদি এবং কেবল যদি $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ হয় যেখানে a, b, c এবং a', b', c' কোনো সংখ্যাই শূন্য নয়।

17. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু (The point of intersection of two straight lines)

ধরা যাক সরলরেখা দুইটি $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. যদি সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে ছেদ করে তবে ছেদবিন্দু সরলরেখা দুইটির সাধারণ বিন্দু হওয়ায় ছেদবিন্দুটির স্থানাঙ্ক দুইটি সরলরেখার সমীকরণই সিদ্ধ করবে। অতএব, ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y') হলে,

$a_1x' + b_1y' + c_1 = 0$

$a_2x' + b_2y' + c_2 = 0$

বজ্রগুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\dfrac{x'}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y'}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

অতএব, ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কগুলি, $x' = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ এবং $y' = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, যেখানে $a_1b_2 \neq a_2b_1$

মন্তব্য : $a_1b_2 = a_2b_1$ হলে সমীকরণ দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা নির্দেশ করে। সেক্ষেত্রে ছেদবিন্দু নির্ণয়ের কোনো প্রশ্ন উঠে না।

18A. তিনটি সরলরেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

ধরি, নিম্নবর্ণিত তিনটি সরলরেখা

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ... ... (1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ... ... (2)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ ... ... (3)

একটি ত্রিভুজ তৈরি করে।

আরও ধরি, উপরিউক্ত (1) এবং (2), (2) এবং (3), (3) এবং (1) সমীকরণগুলো অর্থাৎ তিন জোড়া সমীকরণ সমাধান করে ত্রিভুজটির তিনটি শীর্ষবিন্দু (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) নির্ণয় করা যায়। সেই ক্ষেত্রে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

কিন্তু একটি বিকল্প পদ্ধতি রয়েছে যা ব্যবহার করলে তিন জোড়া সমীকরণ সমাধানের প্রয়োজন হয় না। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সহজ সূত্রটি এই—

উপরিউক্ত (1), (2) এবং (3) রেখাগুলো দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta^2}{C_1C_2C_3}$.

যেখানে $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং C_1, C_2, C_3 হচ্ছে Δ নির্ণায়কটির যথাক্রমে c_1, c_2, c_3 উপাদানের সহ-গুণক।

উদাহরণমালা

উদা. 1. $3x - 4y - 12 = 0$ রেখার ঢাল এবং অক্ষ দুইটি থেকে খণ্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

$3x - 4y - 12 = 0$ বা, $4y = 3x - 12$ বা, $y = \frac{3}{4}x - 3$

অতএব, রেখাটির ঢাল $= \frac{3}{4}$ (উত্তর-১)

$3x - 4y = 12$ বা, $\frac{3x}{12} - \frac{4y}{12} = 1$ বা, $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$ (উত্তর-২)

x-অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশের পরিমাণ 4 এবং y অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশের পরিমাণ —3. (উত্তর)

উদা. 2. দেখাও যে, $5x + 6y + 8 = 0$ রেখাটি $(6, -1)$ ও $(-2, -5)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রদত্ত বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y') হলে,

ভুজ $= \dfrac{6-2}{2} = 2$, কোটি $= \dfrac{-1-5}{2} = -3$

মধ্যবিন্দুর ভুজ $(2, -3)$ এই বিন্দুটি $5x+6y+8=0$ সরলরেখায় অবস্থিত কেননা,

$$5x+6y+8=5\times2+6(-3)+8=10-18+8=-0$$

অতএব, $5x+6y+8=0$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাটি প্রদত্ত বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদা. 3. যে সরলরেখা $(-1, 3)$ এবং $(4, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায়, তার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য বের কর।

নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$ বা, $\frac{x+1}{-1-4}=\frac{y-3}{3+2}$

বা, $\frac{x+1}{-5}=\frac{y-3}{5}$ বা, $-x-1=y-3$

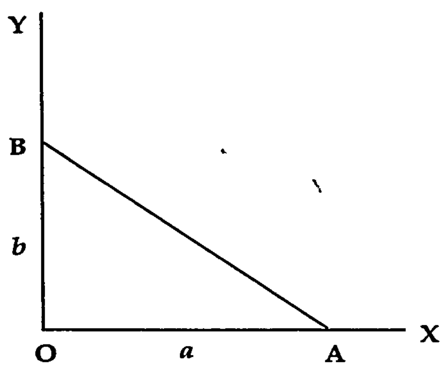
বা, $x+y=2$ বা, $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$

সুতরাং সরলরেখাটি দ্বারা অক্ষ রেখা দুইটি ছেদিত অংশের পরিমাণ 2 এবং 2।

অতএব রেখাটির অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ (উত্তর)

উদা. 4. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, যেন $OA-OB=2$ হয়, যেখানে O মূলবিন্দু।

[ঢা. বো. ২০১০; য. বো. ২০১০, ২০০৪; রা. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৯; দি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০২]



মনে করি সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

তাহলে, $OA=a, OB=b$ এবং $a-b=2$

বা, $a=b+2$

যেহেতু, $(3, 2)$ বিন্দু ঐ রেখার উপর অবস্থিত,

$\therefore \frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$

বা, $\frac{3}{b+2}+\frac{2}{b}=1$

বা, $b^2-3b-4=0$

বা, $(b-4)(b+1)=0$

$\therefore$ $b=4$, অথবা, -1; তখন যথাক্রমে $a=6$ অথবা, 1

সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখা, $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$ বা, $2x+3y=12$

অথবা, $x+\frac{y}{-1}=1$ বা, $x-y=1$ এখানে দুইটি উত্তরই গ্রহণযোগ্য।

উদা. 5. $5x+4y-20=0$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশকে সমান তিন ভাগে ভাগ করে এরূপ বিন্দু দুইটির সাথে মূলবিন্দুর সংযোজক রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৫; রা. বো. ২০০০]

প্রদত্ত সরলরেখাটি

$5x+4y-20=0$

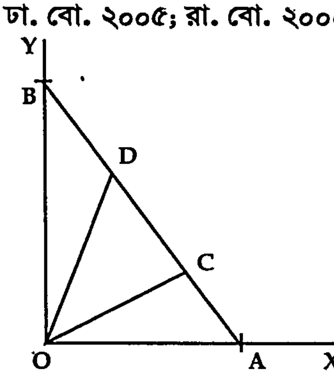
বা, $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$

অতএব, A বিন্দু $(4, 0)$ এবং B বিন্দু $(0, 5)$

মনে করি, C এবং D বিন্দু দুইটি AB সরলরেখার সমত্রিখণ্ডক বিন্দু।

অতএব, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1\times0+2\times4}{3}, \frac{1\times5+2\times0}{3}\right)=\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$

অতএব, OC রেখার সমীকরণ, $y=\frac{5/3}{8/3}x$ বা, $y=\frac{5x}{8}$ বা, $5x=8y$



আবার, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{2\times0+1\times4}{3}, \frac{2\times5+1\times0}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$

অতএব, OD রেখার সমীকরণ, $y=\frac{10/3}{4/3}x$ বা, $y=\frac{5x}{2}$ বা, $5x=2y$ (উত্তর)

উদা. 6. $3x+y+7=0$, $2x-3y+12=0$ এবং $x-y+1=0$ রেখা তিনটির দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

রেখা তিনটি হচ্ছে $3x+y+7=0$
$2x-3y+12=0$
$x-y+1=0.$

$$\text{এখানে } \Delta = \begin{vmatrix}3 & 1 & 7\\2 & -3 & 12\\1 & -1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} \text{ (ধরি)}$$

$$=c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3$$

$$=7\begin{vmatrix}2 & -3\\1 & -1\end{vmatrix}+12\left\{-\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}\right\}+1\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & -3\end{vmatrix}$$

$$=7(-2+3)+12(1+3)+1(-9-2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$
$$=7+48-11=44$$

(i) হতে পাই, $C_1=1, C_2=4, C_3=-11.$

অতএব, রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta^2}{C_1C_2C_3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{44\times44}{1\times4\times(-11)}=-22.$

বিয়োগ চিহ্ন উপেক্ষা করে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 22 বর্গ একক।

প্রশ্নমালা II A

1. প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :
(i) মূলবিন্দু এবং $(-3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায়।
(ii) মূলবিন্দু এবং $(-4, 4)$ বিন্দু দিয়ে যায়। উত্তর : (i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=0$, (ii) $x+y=0$

2. একটি সরলরেখা মূল বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের সাথে (1) 30°, (ii) 90°, (iii) 135° কোণ উৎপন্ন করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : (i) $x-\sqrt{3}y=0$, (ii) $x=0$, (iii) $x+y=0$

3. m ও c-এর মান কত হলে, $y=mx+c$ রেখাটি $(2, 3)$ ও $(3, 4)$ বিন্দু দিয়ে যাবে ? উত্তর : $m=1, c=1$

4. দুইটি সরলরেখা উভয়ই $(4, -5)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা যথাক্রমে x-অক্ষের সমান্তরাল ও তার উপর লম্ব। রেখা দুইটির সমীকরণ বের কর। উত্তর : $y+5=0, x-4=0$

5. একটি সরলরেখা অক্ষ দুইটি থেকে সমান সমান অংশ ছেদ করে এবং (α, β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৪] উত্তর : $x+y=\alpha+\beta$

6. (i) $ax+by=c$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, p-এর মান a, b-তে প্রকাশ কর। [সি. বো. ২০১০, ২০০২; ব. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৭ ; ঢা. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৩] উত্তর : $p=\pm c/\sqrt{(a^2+b^2)}$

(ii) $2x+3y=7$ এবং $3ax-5by+15=0$ একই সরলরেখা প্রকাশ করলে a ও b ধ্রুবকের মান নির্ণয় কর। উত্তর : $a=-\frac{10}{7}, b=\frac{9}{7}$

7. (i) একটি সরলরেখা স্থানাঙ্ক অক্ষ দুইটি থেকে যে অংশ দুইটি ছেদ করে তাদের সমষ্টি ও অন্তর যথাক্রমে 9 ও 5 ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $2x+7y=14$; $7x+2y=14$

(ii) একটি ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0), (0, b), (c, 0)$ । বর্ধিত বাহু তিনটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$; $y=0.$

(iii) দেখাও যে $4x + 9y = 36$ এবং $4x - 9y = 36$ রেখা দুইটি y-অক্ষের সাথে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

8. একটি সরলরেখা স্থানাঙ্ক অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের অংশক ছেদ করে। মূলবিন্দু থেকে তার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক হলে রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০১১; ব. বো. ২০১১] উত্তর ঃ $x + y = 4\sqrt{2}$

9. একটি সরলরেখা নিম্নলিখিত বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $(-1, -2)$ এবং $(7, -1)$ উত্তর ঃ $x - 8y - 15 = 0$

(ii) (a, b) এবং $((-a, -b)$ উত্তর ঃ $bx - ay = 0$

(iii) $(0, -a)$ এবং $(b, 0)$ উত্তর ঃ $ax - by = ab$

10. একটি সরলরেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিবিভক্ত হয় ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৩, ২০০০] উত্তর ঃ $3x + 2y = 12$

11. একটি সরলরেখা (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে এমনভাবে আঁকা হলো যে, তার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2$

12. একটি সরলরেখা $(-2, -5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষ দুইটিকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, যখন $OA + 2.\ OB = 0$ হয় এবং O মূলবিন্দু। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ব. বো. ২০১০, ২০০৮; সি. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৬, ২০০১, য. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৪] উত্তর ঃ $x - 2y - 8 = 0$

13. একটি সরলরেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(6, 2)$ বিন্দুতে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৭, ২০০৪ ; কু. বো. ২০০০; চ. বো. ২০০০; মা. বো. ২০১১, ২০০১] উত্তর ঃ $x + 2y = 10$

14. একটি সরলরেখা $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট অংশ ছেদ করে। তার সমীকরণ এবং যে বিন্দুতে তার কোটি, ভুজের দ্বিগুণ তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $y - x = 3$; $(3, 6)$

15. একটি সরলরেখা $(2, 6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং রেখাটির দ্বারা অক্ষ দুইটির খণ্ডিত অংশের সমষ্টি 15 ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা. বো. ২০০৮, ২০০৪] উত্তর ঃ $2x + y = 10, 3x + 2y = 18$

16. একটি সরলরেখা $(6, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তার দ্বারা অক্ষ দুইটির খণ্ডিত অংশের গুণফল 1 ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $x + 4y = 2, x + 9y + 3 = 0$

17. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষের সঙ্গে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং মূল বিন্দু থেকে 4 একক দূরে অবস্থিত ; x ও y-অক্ষের ছেদক অংশের দৈর্ঘ্য দুইটিও বের কর।
[রা. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $\sqrt{3}\,x - y = \pm 8, \frac{8}{\sqrt{3}}, 8$

18. একটি সরলরেখা $(1, 2)$ এবং $(3, 4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং (x, y) তার উপর একটি বিন্দু। দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$. [রা. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৯; ২০০৬]

✓19. দেখাও যে, $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি $(-3, 6)$ বিন্দু থেকে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত সকল সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [চ. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৫; সি. বো. ২০০১]

20. $x - 4 = 0, y - 5 = 0, x + 3 = 0, y + 2 = 0$ সমীকরণগুলি একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে। চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০১]
উত্তর ঃ $x - y + 1 = 0, x + y - 2 = 0$

21. $(-3, -1), (11, 13)$ $(-1, -3)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তাদের ছেদ বিন্দু বের কর। উত্তর ঃ $5y - 9x = -6, 13y - 15x = 4, 4y - 3x = 5$; $\left(\frac{7}{3}, 3\right)$

22. যদি $(a, 0), (0, b)$ এবং $(1, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.
[মা. বো. ২০১০, ২০০২]

23. $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটির অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরোক্ত খণ্ডিত অংশ কোনো বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর : $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{4}\right)$; $61\frac{1}{4}$ বর্গ একক।

[রা. বো. ২০১০, ২০০৩, ২০০১; দি. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৮, ২০০১; ঢা. বো. ২০০৭, ২০০১; য. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০৫; সি. বো. ২০০৩]

24. t-এর যে কোনো মানে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t + 5, 2t - 4)$; P বিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। সঞ্চার পথটি অক্ষ দুইটি থেকে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ নির্ণয় কর। উত্তর : $2x - y = 14$; 7 এবং -14

25. A (h, k) বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং B (k, h) বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০৫, ২০০১ ; য. বো. ২০১১; ব. বো. ২০১০, ২০০৪, ২০০১; দি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০২, ২০০০; চ. বো. ২০০৪, ২০০০; কু. বো. ২০০৩, ২০০২; সি. বো. ২০০২; মা. বো. ২০১০]

উত্তর : $x + y - 6 = 0$

26. A $(1, 1)$, B $(3, 4)$ এবং C $(5, -2)$ ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। AB ও AC-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে তা BC-এর সমান্তরাল। [ঢা. বো. ২০১১; চ. বো. ২০১০, ২০০৩; দি. বো. ২০১০; য. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৮, ২০০৬; মা. বো. ২০০৭] উত্তর : $6x + 2y = 17$

27. $3x + by + 1 = 0$ এবং $ax + 6y + 1 = 0$ রেখা দুইটি $(5, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে; a ও b-এর মান নির্ণয় কর। যদি প্রথম রেখাটি x-অক্ষকে A বিন্দুতে এবং দ্বিতীয় রেখাটি y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে AB-সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০২] উত্তর : $a = -5, b = -4$, $3x + 6y + 1 = 0$

28. একটি সরলরেখা $(2, 5)$ এবং $(5, 6)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, রেখাটি $(-4, 5)$ ও $(-3, 2)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখার উপর লম্ব হবে। উত্তর : $x - 3y + 13 = 0$

29. OABC একটি সামান্তরিক ; OA, x-অক্ষ বরাবর অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 2)$; A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৯, ২০০৬, ২০০৪; ঢা. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০১]

উত্তর : $(3, 0), (1, 2)$; $x + y - 3 = 0$

30. A, B ও C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -2)$, $(-3, 0)$ এবং $(5, 6)$ । প্রমাণ কর যে, AB, AC সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে। উক্ত বিন্দুগুলিকে কোনো আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দু ধরলে তার চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৪] উত্তর : $(1, 8)$

31. মূলবিন্দু এবং $x + 3y - 12 = 0$ রেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের ত্রিখণ্ডন বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১০; য. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৭, ২০০৩ ; ব. বো. ২০০৭] উত্তর : $x = 6y$, $2x = 3y$

32. মূলবিন্দু এবং (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যদি $(b, 0)$ এবং (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখার উপর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$. [রা. বো. ২০০৪; চ. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০৬]

33. $2y + x - 5 = 0$, $y + 2x - 7 = 0$ এবং $x - y + 1 = 0$ রেখা তিনটির দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বের কর। [য. বো. ২০০৩] উত্তর : $\frac{3}{2}$

34. দেখাও যে, $y = mx$, $y = m_1x$ এবং $y = b$ রেখা তিনটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_1}\right)$. [কু. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০৭]

35. দেখাও যে, $x = a, y = b, y = mx$ রেখা তিনটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$ ।

[রা. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৫; মা. বো. ২০১০]

36. প্রমাণ কর যে, $(-4, 4)$, $(0, -4)$, $(2, 7)$ বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ; অতিভুজের মধ্যবিন্দু ও বিপরীত শীর্ষের সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x + 2y - 4 = 0$

37. x-অক্ষের উপর P, Q বিন্দু দুইটি এবং y-অক্ষের উপর R, S বিন্দু দুইটি অবস্থিত। PR ও QS রেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $4x + 3y + 6 = 0$ এবং $x + 2y - 1 = 0$; দেখাও যে, PQ = RS [ঢা. বো. ২০০৪]

38. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $x + 2y = 4, 2x - y = 3$ এবং $x - y + 2 = 0$; প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী এবং তার ক্ষেত্রফল $7\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

39. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষ দুইটির সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অংকিত লম্ব x-অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।
[য. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০১] উত্তর : $x + y = 4$

40. কোনো সরলরেখা (3, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষ দুটি থেকে বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - y + 2 = 0$

41. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ (– 4, 3) বিন্দুতে 5 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। [সি. বো. ২০১১, ২০০৬] উত্তর : $9x - 20y + 96 = 0$

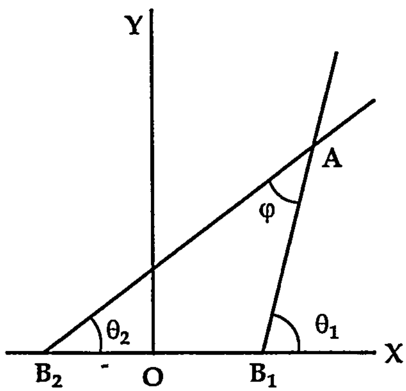
18B. দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ

দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় করতে হবে।

(i) মনে করি, AB_1 ও AB_2 সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণ ϕ ; তাহলে, $\angle B_1AB_2 = \phi$.

মনে করি $\angle AB_1X = \theta_1$ এবং $\angle AB_2X = \theta_2$ এবং $\theta_1 > \theta_2$

$\therefore \quad \phi = \theta_1 - \theta_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$



AB_1 এবং AB_2-সরলরেখা দুইটির সমীকরণ মনে করি $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$. তাহলে,

$\tan\theta_1 = m_1$ এবং $\tan\theta_2 = m_2$

(1) নং থেকে পাই,

$$\tan\phi = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

অর্থাৎ, $\tan\phi = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$. এই সূত্র হতে ϕ-এর মান নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য : $\theta_2 > \theta_1$ হলে $\phi = \theta_2 - \theta_1 = -(\theta_1 - \theta_2)$

$$\therefore \quad \tan\phi = \tan\{-(\theta_1 - \theta_2)\} = -\tan(\theta_1 - \theta_2)$$
$$= -\frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

সুতরাং, আমরা পাই, $\tan\phi = \pm \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

$\tan\phi$-এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান যথাক্রমে রেখা দুইটির মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণের মান নির্দেশ করে।

(ii) যদি সরলরেখা দুইটির সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ হয়, তবে m-আকৃতিতে সমীকরণ দুইটি লিখলে পাই, $y = -\dfrac{a_1}{b_1}x - \dfrac{c_1}{b_1}$ এবং $y = -\dfrac{a_2}{b_2}x - \dfrac{c_2}{b_2}$

এখানে রেখা দুইটির ঢাল যথাক্রমে, $-\dfrac{a_1}{b_1} = m_1$ এবং $-\dfrac{a_2}{b_2} = m_2$

$$\text{অতএব, } \tan\phi = \pm\frac{-\dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2}}{1 + \dfrac{a_1a_2}{b_1b_2}} = \pm\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}$$

19. দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত

দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হবে, যদি এবং কেবল যদি তারা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ রেখা দুইটির সমান্তরাল হওয়ার শর্ত $\theta_1 = \theta_2$

সুতরাং $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$ বা, $m_1 = m_2$

অনুরূপভাবে, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুইটির সমান্তরাল হওয়ার শর্ত হলো

$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ বা, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

উপরের সম্পর্কগুলি থেকে এটি পরিষ্কার যে দুইটি সমান্তরাল রেখাকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা চলে, যেহেতু তাদের ঢাল সমান।

(i) $y = mx + c_1$ এবং $y = mx + c_2$ (ii) $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$

(iii) $4x - 3y = 7$ এবং $4x - 3y = 12$

অতএব, দেখা যাচ্ছে যে দুইটি সরলরেখার সমীকরণে যদি কেবল তাদের ধ্রুবক পদটি ভিন্ন হয় তবে তারা এক জোড়া সমান্তরাল সরলরেখা জ্ঞাপন করে। অতএব, একটি সরলরেখার সমীকরণে x ও y-এর সহগ স্থির রেখে তার ধ্রুবক পদটি ইচ্ছেমত পরিবর্তন করলে প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল একটি রেখার সমীকরণ পাওয়া যায়।

20. দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত

দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত হচ্ছে, এদের অন্তর্ভূত কোণ সমকোণ হওয়া অর্থাৎ $\theta_2 = \theta_1 + 90°$ অথবা $\theta_1 = \theta_2 + 90°$, যখন (যথাক্রমে) $\theta_2 > \theta_1$ বা $\theta_1 > \theta_2$

এখন, $m_2 = \tan\theta_2 = \tan(\theta_1 + 90°) = -\cot\theta_1 = -\frac{1}{m_1}$ অথবা

$m_1 = \tan\theta_1 = \tan(\theta_2 + 90°) = -\cot\theta_2 = -\frac{1}{m_2}$ হবে। অর্থাৎ $m_1m_2 = -1$ ... ... (1)

অনুরূপভাবে, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ রেখা দুইটির লম্ব হওয়ার শর্ত হলো

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$$

বা $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ ... ... (2)

অতএব, দেখা যাচ্ছে যে, দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত হচ্ছে তাদের ঢালের গুণফল -1 হতে হবে। দুইটি পরস্পর লম্ব রেখার সমীকরণ নিম্নলিখিতভাবে লেখা চলে।

(i) $y = m_1x + c_1$ এবং $y = -\frac{1}{m_1}x + c_2$, কারণ $m_1 m_2 = m_1\left(-\frac{1}{m_1}\right) = -1$

(ii) $ax + by + c_1 = 0$ এবং $bx - ay + c_2 = 0$

কারণ $a_1a_2 + b_1b_2 = ab + b(-a) = ab - ab = 0$

(iii) $3x - 2y = 5$ এবং $2x + 3y = 7$

কারণ $a_1a_2 + b_1b_2 = 3 \times 2 + (-2) \times 3 = 6 - 6 = 0$

অতএব, দেখা যাচ্ছে একটি রেখার সমীকরণে x ও y-এর সহগ দুইটি পরস্পর পরিবর্তন করার পর, এদের যে কোনো একটির চিহ্ন পরিবর্তন করে, ধ্রুবক পদটিকে ইচ্ছেমত পরিবর্তন করে নিলে প্রদত্ত রেখার উপর লম্ব অপর একটি রেখার সমীকরণ পাওয়া যায়।

21. দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সমবিন্দু সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ

মনে করি সরলরেখা দুইটি

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ... ... (i)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ... ... (ii)

(i) এবং (ii)-এর ছেদবিন্দু (x', y') হলে, $a_1x' + b_1y' + c_1 = 0$ এবং $a_2x' + b_2y' + c_2 = 0$

$\therefore \quad a_1x' + b_1y' + c_1 + k(a_2x' + b_2y' + c_2) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (iii)

যেখানে k একটি ইচ্ছামূলক (arbitrary) ধ্রুবক।

(iii) থেকে এটি স্পষ্ট যে (x', y') বিন্দুটি,

$a_1x + b_1y + c_1 + k(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (iv)

সমীকরণটি সিদ্ধ করে। সমীকরণটি x, y সংবলিত একঘাত সমীকরণ হওয়ায়, একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। অতএব, (iv)নং সরলরেখাটি (i) এবং (ii)-এর ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত একটি সরলরেখা। প্রকৃতপক্ষে, k-এর বিভিন্ন মানের $(k \neq 0)$ জন্য (iv)নং সমীকরণটি বিভিন্ন সরলরেখা প্রকাশ করে ; যাদের প্রত্যেকটি (x', y') বিন্দু দিয়ে যায়।

উল্লেখ্য যে, একটি বিন্দু দিয়ে অসংখ্য সরলরেখা আঁকা যায় এবং (iv)নং সমীকরণটি যে সকল রেখা সূচিত করে তার সবগুলিই একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অর্থাৎ (i) এবং (ii)-এর ছেদবিন্দু দিয়ে যায়।

22. তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্ত

যদি $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এবং $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ রেখা তিনটি একই বিন্দু (x', y') দিয়ে যায়, তবে (x', y') বিন্দুটি তিনটি সরলরেখার সমীকরণই সিদ্ধ করবে। অর্থাৎ,

$a_1x' + b_1y' + c_1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (1)

$a_2x' + b_2y' + c_2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (2)

$a_3x' + b_3y' + c_3 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (3)

(1), (2) এবং (3) নং সমীকরণ থেকে (x', y') অপসারণ করে আমরা রেখা তিনটির সমবিন্দু হওয়ার শর্ত হিসেবে পাই ;

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

উদাহরণমালা

উদা. 1. $2x + 3y - 1 = 0$ এবং $x - 2y + 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; রেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \pm \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \pm \frac{7}{4}.$$

সূক্ষ্মকোণের tangent-এর মান ধনাত্মক। সুতরাং নির্ণেয় অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণটি হবে $\tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$.

উদা. 2. y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০১ ; ঢা. বো. ২০০০]

প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ $2x - 3y + 4 + k(3x + 3y - 5) = 0$

অথবা $x(2 + 3k) - 3y(1 - k) + 4 - 5k = 0$

রেখাটি y অক্ষের সমান্তরাল সুতরাং y-এর সহগ শূন্য হবে। অর্থাৎ $3(1 - k) = 0$.

$\therefore \quad k = 1$

অতএব, সরলরেখার সমীকরণ $5x - 1 = 0$ (উত্তর)

উদা. 3. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 3y + 4 = 0$ এবং $3x + 4y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $6x - 7y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব হয়।

$2x + 3y + 4 = 0$

$3x + 4y - 5 = 0$

প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ

$2x + 3y + 4 + k(3x + 4y - 5) = 0$, বা, $(3k + 2)x + (4k + 3)y + 4 - 5k = 0$ ... ... (i)

এই রেখাটি $6x - 7y + 8 = 0$ রেখার উপর লম্ব হওয়ার শর্ত

$6(3k + 2) - 7(4k + 3) = 0$, বা, $-10k = 9 \therefore k = -\frac{9}{10}$

(i) নং সমীকরণে k-এর মান বসিয়ে সরল করে পাই $7x + 6y - 85 = 0$ (উত্তর)

উদা. 4. এমন একটি সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় কর যা $5x - 3y - 7 = 0$ ও $4x + y - 9 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $13x - y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল হয়।

প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ

$5x - 3y - 7 + k(4x + y - 9) = 0$, অথবা $(4k + 5)x + (k - 3)y - 9k - 7 = 0$ ... (i)

উহা $13x - y - 1 = 0$-এর সমান্তরাল হবে যদি এবং কেবল যদি

$\frac{4k+5}{13} = \frac{k-3}{-1}$ হয়

বা, $13k - 39 = -4k - 5$ বা $17k = 34 \quad \therefore k = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $13x - y - 25 = 0$

উদা. 5. দেখাও যে, k-এর সকল মানের জন্য $(3 + 2k)x + 5ky - 3 = 0$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৩]

প্রদত্ত সমীকরণ,

$(3 + 2k)x + 5ky - 3 = 0$

বা, $3x + 2kx + 5ky - 3 = 0$

বা, $3x - 3 + k(2x + 5y) = 0$ ... ... (1)

(1) নং সরলরেখাটি k-এর সকল মানের জন্য $3x - 3 = 0$, বা, $x - 1 = 0$

এবং $2x + 5y = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়া যায়

$x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1$

অতএব, $2x + 5y = 0$ থেকে পাই,

$2 + 5y = 0$, বা, $y = -\frac{2}{5}$

নির্দিষ্ট বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$

উদা. 6. মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ রেখা, $(b, 0)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী সরলরেখার উপর লম্ব হলে প্রমাণ কর যে, $x_1x_2 + y_1y_2 = bx_1$. [ব. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৪; চ. বো. ২০০৩]

মূলবিন্দু ও (x_1, y_1) বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল $= \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{x_1}$

$(b, 0)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল $= \frac{y_2 - 0}{x_2 - b} = \frac{y_2}{x_2 - b}$

যেহেতু সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব, অতএব,

$$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2-b}=-1$$

বা, $y_1y_2=-x_1(x_2-b)$

বা, $y_1y_2=-x_1x_2+bx_1$

বা, $y_1y_2+x_1x_2=bx_1$

$\therefore\ x_1x_2+y_1y_2=bx_1$ (প্রমাণিত)

উদা. 7. $4x-2y+7=0$ সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যা $(2, 3)$, $(-2, 4)$ বিন্দু দুইটি থেকে সমদূরবর্তী। [ব. বো. ২০০১]

মনে করি (x, y) বিন্দুটি $(2, 3)$ এবং $(-2, 4)$ বিন্দু দুইটি থেকে সমদূরবর্তী

$\therefore\ (x-2)^2+(y-3)^2=(x+2)^2+(y-4)^2$

বা, $x^2-4x+4+y^2-6y+9=x^2+4x+4+y^2-8y+16$

বা, $8x-2y+7=0$

অন্য দিকে $4x-2y+7=0$ কেননা নির্দিষ্ট বিন্দুটি ঐ রেখার উপর অবস্থিত।

বিয়োগ করে $4x=0\ \therefore x=0$ আবার, $-2y+7=0\ \therefore y=\frac{7}{2}$ নির্ণেয় বিন্দু $\left(0, \frac{7}{2}\right)$

প্রশ্নমালা II B

1. নিচের প্রতি জোড়া সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ঃ (i) $3x=4y-1, 5y-6x=8$ (ii) $3x-5y-7=0, x$ ও y অক্ষ। অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী রেখাটির খণ্ডিত অংশটুকু নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ (i) $(-3, -2)$, (ii) $\left(\frac{7}{3}, 0\right), \left(0, -\frac{7}{5}\right); \frac{7}{15}\sqrt{34}$

2. (i) প্রত্যেক ক্ষেত্রে রেখা দুইটির অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় কর ঃ

(a) $y=2$ এবং $y+x-3=0$ (b) $y-\sqrt{3}x-5=0, \sqrt{3}y-x+6=0$ (c) $(2-\sqrt{3})x-y+5=0$ এবং $(2+\sqrt{3})(x-3)-y=0$

(ii) $5x-5y\sqrt{3}+2=0$ এবং $3x\sqrt{3}+3y-4=0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ (i) (a) $45°$, (b) $30°$, (c) $60°$ (ii) $90°$

3. $(3, 2)$ বিন্দু এবং $x-y+4=0$, $y-2x-5=0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এই রেখার সাথে প্রদত্ত রেখা দুইটি কি পরিমাণে আনত তাও নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $x+4y=11$; $\tan^{-1}\frac{5}{3}, \tan^{-1}\frac{9}{2}$

4. মূল বিন্দু এবং $x-y-4=0$ ও $7x+y+20=0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে গমনকারী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০০] উত্তর ঃ $3x-y=0$

5. a-এর মান কত হলে (i) $3x+2y-5=0$, (ii) $ax+4y-9=0$ (iii) $x+2y-7=0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হবে। বিশেষ অবস্থা দুইটি আলোচনা কর যখন $a=2$ এবং $a=6$.

উত্তর ঃ $a=7$; $a=2$ হলে (ii) ও (iii) রেখা দুইটি সমান্তরাল; $a=6$ হলে, (i) ও (ii) রেখা দুইটি সমান্তরাল।

6. k-এর মান কত হলে $5x+4y-6=0$ এবং $2x+ky+9=0$ রেখা দুইটি সমান্তরাল হবে ? উত্তর ঃ $k=\frac{8}{5}$

7. k-এর মান কত হলে $2x-y+7=0$ ও $3x+ky-5=0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে ?

[মা. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $k=6$.

8. দেখাও যে, (α, β) বিন্দু এবং $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ও $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে যে রেখা অতিক্রম করে তার সমীকরণ

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_1\alpha + b_1\beta + c_1} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_2\alpha + b_2\beta + c_2}$$

9. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা

(i) $(4, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 11y - 2 = 0$ রেখাটির সমান্তরাল হয়।

[মা. বো. ২০০৬] উত্তর : $2x + 11y + 25 = 0$

(ii) $(2, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x - 3y = 7$ রেখার উপর লম্ব হয়।

[য. বো. ২০০৭ ; কু. বো ২০০১, ২০০০; মা. বো. ২০০৩]] উত্তর : $2y + 3x = 0$

(iii) $(2, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $(5, 7)$ ও $(-6, 3)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখার উপর লম্ব হয়।

উত্তর : $11x + 4y = 10$

(iv) $(4, -3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 11y - 2 = 0$-এর উপর লম্ব।

[রা. বো. ২০০৫; মা. বো. ২০০৪] উত্তর : $11x - 2y - 50 = 0$

10. $x \cos\theta + y \sin\theta = p$ চলমান রেখাটি x ও y-অক্ষরেখা দুইটিকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, এখানে p-একটি ধ্রুবক। দেখাও যে, AB-এর মধ্য বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হবে $p^2 (x^2 + y^2) = 4x^2y^2$

[ঢা. বো. ২০১১; কু. বো. ২০১০, ২০০৭ ; সি. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২; ব. বো. ২০০২]

11. AB ও AC রেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y = 2x + 1$ এবং $y = 4x - 1$. AB-এর উপর অঙ্কিত লম্ব AP-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৬] উত্তর : $x + 2y = 7$

12. এমন একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দু দিয়ে যায়। [কু. বো. ২০১০, ২০০৮; ব. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০২]

উত্তর : $ax + by = a^2$

13. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x + 2y = 9$ এবং $2x + 3y = 11$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং প্রথমোক্ত রেখার উপর লম্ব হয়। উত্তর : $2x - 3y + 7 = 0$

14. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x - 4y = 7$ ও $2x + 5y = 9$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $x + y = 0$ রেখার সমান্তরাল হয়। উত্তর : $23x + 23y = 84$

15. দুইটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $7x + 13y - 87 = 0$ ও $5x - 8y + 7 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ দুইটি হতে সমান সাংখ্যমানের অংশ ছেদ করে।

[চ. বো. ২০০৬; সি. বো. ২০০৬; ঢা. বো. ২০০৩] উত্তর: $x + y - 9 = 0; x - y - 1 = 0$

16. (i) দুইটি সরলরেখা $(-1, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x - y + 7 = 0$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তাদের সমীকরণ থেকে দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে।

[ঢা. বো. ২০১১, ২০০৭ ; য. বো. ২০১১; রা. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০২ ;

ব. বো. ২০০৮, ২০০৬; সি. বো. ২০০৭ ; চ. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০২; মা. বো. ২০০৯]

উত্তর : $2x + y = 0 ; x - 2y + 5 = 0$

(ii) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(6, 7)$ বিন্দুগামী এবং $3x + 4y = 11$-এর সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। [রা. বো. ২০১১, ২০০৫; চ. বো. ২০১১; দি. বো. ২০০৯] উত্তর : $x - 7y + 43 = 0; 7x + y - 49 = 0.$

17. দুইটি সরলরেখা $(3, 4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $(2-\sqrt{3})\,x + y = 10 - 3\sqrt{3}$ এবং $(2 + \sqrt{3})\,x + y = 3\sqrt{3} + 10$

[দি. বো. ২০১১; সি. বো. ২০১০, ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; য. বো. ২০০১]

18. $x = 3, x = 5, y = 4$ এবং $y = 6$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন বর্গের কর্ণ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[য. বো. ২০১১, ২০০৫; চ. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৫] উত্তর ঃ $x + y - 9 = 0$; $x - y + 1 = 0$

19. $4x + 7y - 12 = 0$ রেখাটি একটি বর্গের কর্ণ নির্দেশ করে এবং বর্গের একটি শীর্ষ $(3, 2)$ বিন্দুতে অবস্থিত। এ বিন্দুটি দিয়ে অতিক্রমকারী বর্গের বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $3x - 11y + 13 = 0$; $11x + 3y + 39 = 0$

20. দুইটি সরলরেখা $(6, -7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $y + x\sqrt{3} = 1$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৫] উত্তর ঃ $y + 7 = 0$; $y + 7 = \sqrt{3}(x - 6)$

21. x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $x - 3y + 2 = 0$ ও $x + y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৭ ; ব. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $y - 1 = 0$

22. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-3, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 3y = 3$ রেখার উপর লম্ব হয়। মূলবিন্দু এবং উপরোক্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ রেখাটিরও সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $3x - 2y + 5 = 0$; $19x + 9y = 0$

23. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x - 2y - 1 = 0$ ও $2x + 3y + 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং যার ঢাল $\tan 45°$. [কু. বো. ২০০৮] উত্তর ঃ $7x - 7y - 3 = 0$

24. $(2, -1)$ বিন্দু থেকে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[চ. বো. ২০১০, ২০০৭ ; ঢা. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৭, ২০০৫, ২০০২ ; য. বো. ২০০৬, ২০০১ ; কু. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৮] উত্তর ঃ $(1/5, 7/5)$

25. $(2, 3)$ বিন্দু থেকে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি থেকে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব বের কর। [কু. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৯, ২০০৩; ব. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৯; মা. বো. ২০০৬, ২০০৫] উত্তর ঃ $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$; 2

26. $5x - 9y + 13 = 0$ ও $9x - 5y + 11 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের সঙ্গে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৯; মা. বো. ২০০৪]

উত্তর ঃ $7x - 7y + 12 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$

27. (x, y) এমনই একটি রেখার উপর অবস্থিত যা $(2, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $(-1, 2)$ ও $(-5, 4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার উপর লম্ব হয়। দেখাও যে, $2x - y - 1 = 0$.

28. (i) দেখাও যে, $x = t, y = 2t + 1$ এবং $x = 2t, y = -t - 4$ রেখা দুইটি $(-2, -3)$ বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। [ব. বো. ২০১১]

(ii) দেখাও যে, $2x = 1 - 4t, y = 1 + t$ এবং $x = 6 - 2t, y = t - 1$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

29. (i) $(8, 5), (-4, -3)$ বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখার লম্ব দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৪, ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৩]

উত্তর ঃ $3x + 2y - 8 = 0$

(ii) $x - 3y - 2 = 0$ রেখার উপর P একটি বিন্দু এবং তা $(2, 3)$ ও $(6, -5)$ বিন্দু দুইটি হতে সমদূরবর্তী। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $(14, 4)$

30. $4x - 3y = 1$ ও $2x - 5y + 3 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ দুইটির সঙ্গে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $x + y = 2$; $x - y = 0$

31. এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষ দুইটির সাথে সমান সাংখ্যিকমানের অংশ ছেদ করে এবং $2x + 3y = 1$ ও $x - 2y + 3 = 0$ রেখা দুইটির সাথে সমবিন্দু। উত্তর ঃ $x - y + 2 = 0$

32. x–অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ রেখা দুইটির সমবিন্দু রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১০; দি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৭ ; কু. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০২; চ. বো. ২০০১; মা. বো. ২০১১, ২০০০] উত্তর : $y + 2 = 0$

33. $3x - 7y + 5 = 0$ এবং $x - 2y = 7$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষ দুইটি থেকে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দু থেকে ঐ রেখার উপর লম্ব দৈর্ঘ্যও বের কর। উত্তর : $x + y = 85 ; \frac{85}{\sqrt{2}}$

34. দুইটি সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $3y = 2x$ রেখার সাথে $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১১] উত্তর : $7x = 4y, x = 8y$

35. y–অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 7y + 11 = 0$ ও $x + 3y - 8 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১১, ২০০১; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৮; মা. বো. ২০০৭, ২০০৩] উত্তর : $13x - 23 = 0$

36. A (2, 1) ও B (5, 2) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১, ২০০৭ ; ঢা. বো. ২০১০; য. বো. ২০০৮, ২০০৪; চ. বো. ২০০৮, ২০০৪; ব. বো. ২০০৭] উত্তর : $3x + y = 12; (0, 12)$

37. দেখাও যে, $2x + y + 5 = 0$ ও $x - 2y - 3 = 0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব। রেখা দুইটিকে কোনো আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু ধরলে এবং অপর বাহু দুইটি (3, 4) বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করলে অবশিষ্ট বাহু দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $2x + y = 10, 2y = x + 5$

38. ABCD সামান্তরিকের AB, BC বাহু দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $2x + y - 8 = 0, x - y + 2 = 0$ এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, -4)$. AD ও DC-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x - y - 6 = 0; 2x + y = 0$

39. একটি সামান্তরিকের দুই বাহুর সমীকরণ $x - y + 1 = 0,\ 2x + 3y - 6 = 0$ এবং এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে। সামান্তরিকের অপর দুই বাহুর সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $2x + 3y - 1 = 0 ; x - y - 2 = 0$

40. যদি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখাটি $2x - y = 1$ এবং $3x - 4y + 6 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $4x + 3y - 6 = 0$ রেখাটির সমান্তরাল হয়, তাহলে a ও b-এর মান নির্ণয় কর। উত্তর : $a = \frac{17}{4}, b = \frac{17}{3}$

41. এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (1, 2), (4, 5) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে 3 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং ঐ রেখার উপর লম্ব হয়। উত্তর : $2x + 2y = 15$

42. (2, 1), (6, 3) বিন্দু দুইটি এবং (6, 3), (8, 1) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার লম্ব দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এ লম্ব দ্বিখণ্ডক দুইটির ছেদবিন্দু x-অক্ষের উপর অবস্থিত।

উত্তর : $y + 2x = 10, y - x + 5 = 0$; ছেদ বিন্দু (5, 0)

43. A $(3, -4)$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত এবং $4x + 3y = 8$ রেখার (i) সমান্তরাল (ii) তার উপর লম্ব রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। যদি রেখা দুইটি $2x + y = 1$-এর সাথে B ও C বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। উত্তর : (i) $3y + 4x = 0$, (ii) $4y - 3x + 25 = 0$; ক্ষেত্রফল $\frac{25}{44}$

44. মূলবিন্দু এবং $4x + 3y - 8 = 0$ ও $x + y = 1$-এর ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। (2, 3) বিন্দু এবং প্রদত্ত রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী রেখাটিরও সমীকরণ বের কর।

উত্তর : $4x + 5y = 0, 7x + 3y - 23 = 0$

45. দেখাও যে, $4x - 6y - 24 = 0$, $3x + 7y + 5 = 0$ এবং $4x - 3y - 18 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু। এদের ছেদ বিন্দু নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $(3, -2)$.

46. একটি সরলরেখা $(1, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষ দুইটির সাথে প্রথম চতুর্ভাগে ৪ বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ সৃষ্টি করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৬]

উত্তর ঃ $4x + y - 8 = 0$

47. দেখাও যে, $3x + 5y - 6 = 0$ ও $2x - 3y + 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু এবং $(4, 9)$ বিন্দুর সংযোগ সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

48. $(1, 2), (4, 4), (2, 8)$ বিন্দুগুলি একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্য বিন্দু। বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $2x + y - 4 = 0, 6x - y - 20 = 0, 2x - 3y + 20 = 0$

49. A $(3, -1)$, B $(-2, 3)$ বিন্দু দুইটি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং তার লম্ব বিন্দুটি মূলবিন্দুতে। অবশিষ্ট শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\left(-\frac{36}{7}, -\frac{45}{7}\right)$

50. (i) $x - 3y + 2 = 0, x - 6y + 3 = 0, x + ay = 0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে, a-এর মান নির্ণয় কর।

[ব. বো. ২০০৩] উত্তর ঃ 3

(ii) $3x + 5y - 2 = 0, 2x + 3y = 0, ax + by + 1 = 0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে, a ও b-এর সম্পর্ক নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৯] উত্তর ঃ $6a - 4b = 1$

(iii) $ax + by + c = 0,\ bx + cy + a = 0, cx + ay + b = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হলে দেখাও যে, $a + b + c = 0$

[সি. বো. ২০০১]

23. সরলরেখার ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পার্শ্ব (The positive and negative sides of a straight line)

মনে করি L ঃ $ax + by + c = 0$ যে কোনো সরলরেখা।

$P(x, y)$ যে কোনো বিন্দু হলে $L(P)$ দ্বারা $ax + by + c$ রাশিটিকে বুঝায়। সুতরাং সেট হিসেবে

$L = \{P \in R \times R : L(P) = 0\}$

ঐ সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন সকল বিন্দুর সেটকে দুইটি উপসেটে বিভক্ত করা যায়; যথা—

$L^+ = \{P \in R \times R : L(P) > 0\}$

$L^- = \{P \in R \times R : L(P) < 0\}$

L, L^+, L^- এই তিনটি সেট পরস্পর নিশ্ছেদ (disjoint) এবং $L \cup L^+ \cup L^- = R \times R$

কেননা P বিন্দুটি ঐ সরলরেখায় অবস্থিত $\Leftrightarrow L(P) = 0$

এবং $P \notin L \Leftrightarrow$ হয় $P \in L^+$ না হয় $P \in L^-$.

আমরা প্রমাণ করব L^+ সেটের সকল বিন্দু ঐ সরলরেখাটির একটি নির্দিষ্ট পার্শ্বে অবস্থিত। ফলে L^- সেটের সকল বিন্দুই সরলরেখাটির অপর পার্শ্বে অবস্থিত হবে। L^+ দ্বারা নির্ধারিত সেটটিকে সরলরেখাটির ধনাত্মক পার্শ্ব এবং L^- দ্বারা নির্ধারিত সরলরেখাটির ঋণাত্মক পার্শ্ব বলা হয়।

প্রমাণ ঃ x-অক্ষের বা y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার ক্ষেত্রে ধনাত্মক পার্শ্ব ও ঋণাত্মক পার্শ্ব সহজেই চিহ্নিত করা যায়। মনে করি L-এর সমীকরণ $y = b$. এই সরলরেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল। এই রেখাটির উপরের দিকে অবস্থিত প্রতিটি বিন্দুর কোটি $> b$; সুতরাং $L(P) = y - b > 0$ ঐ রেখাটির নিচের দিকে অবস্থিত প্রতিটি বিন্দুর ভুজ $< b$.

সুতরাং $L(P) = y - b < 0$.

অতএব এক্ষেত্রে সরলরেখাটির ধনাত্মক পার্শ্ব হচ্ছে রেখাটির উপরের দিকে অবস্থিত সকল বিন্দুর সেট এবং ঋণাত্মক পার্শ্ব হচ্ছে নিচের দিকে অবস্থিত সকল বিন্দুর সেট।

অনুরূপভাবে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা $x = a$ এর ধনাত্মক পার্শ্ব হচ্ছে রেখাটির ডান দিকে অবস্থিত সকল বিন্দুর সেট এবং ঋণাত্মক পার্শ্ব হচ্ছে রেখাটির বাম দিকে অবস্থিত সকল বিন্দুর সেট।

এখন মনে করি, L রেখাটি কোনো অক্ষের সমান্তরাল নয়। ফলে $a \neq 0$ এবং $b \neq 0$. ব্যাপকত্বের হানি না করে আমরা ধরে নিতে পারি $b > 0$.

রেখাটির বাইরে অবস্থিত যে কোনো বিন্দু $P(x_1, y_1)$ দিয়ে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা আঁকি, যা রেখাটিকে $P_0(x_0, y_0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে $x_0 = x_1$, কেননা P বিন্দুগামী y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হচ্ছে $x = x_1$.

$P_0 \in L$; সুতরাং $ax_0 + by_0 + c = 0$

সুতরাং $c = -ax_0 - by_0$

অতএব $L(P) = ax_1 + by_1 + c = ax_1 + by_1 - ax_1 - by_0 = b(y_1 - y_0)$

সুতরাং $L(P) > 0 \Leftrightarrow b(y_1 - y_0) > 0 \Leftrightarrow (y_1 - y_0) > 0$

কেননা $b > 0$ ধরা হয়েছে।

আবার $L(P) < 0 \Leftrightarrow b(y_1 - y_0) < 0 \Leftrightarrow (y_1 - y_0) < 0$.

অতএব L^+ এবং L^- হচ্ছে যথাক্রমে সরলরেখাটির ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক পার্শ্ব।

এখন মনে করি P, Q বিন্দু দুইটি উভয়েই সরলরেখাটির একই পার্শ্বে অবস্থিত। তাহলে L(P) এবং L(Q) উভয়ে হয় ধনাত্মক না হয় উভয়েই ঋণাত্মক হবে। P, Q বিন্দু দুইটি সরলরেখাটির দুইটি বিভিন্ন পার্শ্বে অবস্থিত হলে L(P) এবং L(Q) সংখ্যাদ্বয়ের একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হবে। ঐ উক্তিগুলির সবগুলির বিপরীত উক্তিও সত্য। সুতরাং দাবি সম্পূর্ণরূপে প্রমাণিত হলো।

দ্রষ্টব্য ঃ (i) সরলরেখাটির উপর অবস্থিত নয় এমন যে কোনো একটি বিন্দু P-এর জন্য L(P)-এর চিহ্ন নির্ণয় করে রেখাটির ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পার্শ্ব সনাক্ত করা যায়।

মনে করি $O \notin L$, $P \notin L$.

P বিন্দু এবং মূলবিন্দু সরলরেখাটির একই পার্শ্বে অবস্থিত হবে $\Leftrightarrow$ L(P) এবং c একই চিহ্নবিশিষ্ট হয়; P এবং মূলবিন্দু পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হলে $\Leftrightarrow$ L(P) এবং c পরস্পর বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়।

উদাহরণ 1. (3, − 2) ও (−3, −1) বিন্দু দুইটি $3x - 8y = 7$ রেখার একই অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত কিনা নির্ণয় কর। বিন্দু দুইটির কোন্‌টি রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু, সেই পার্শ্বে অবস্থিত ?

(3, − 2) ও (−3, −1) বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $3x - 8y - 7$ রাশিটিতে x ও y-এর পরিবর্তে বসিয়ে পাই,

$3 \times 3 - 8(-2) - 7 = 18$ এবং $3(-3) - 8(-1) - 7 = -8$. সংখ্যাদ্বয় পরস্পর বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট। অতএব, বিন্দু দুইটি রেখাটির পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

যেহেতু, −8 ও ধ্রুবক −7 একই চিহ্নবিশিষ্ট, অতএব, (−3, −1) বিন্দুটি রেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু, সেই পার্শ্বে অবস্থিত।

দ্রষ্টব্য ঃ এখানে মূলবিন্দু রেখাটির ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত।

24. লম্ব দূরত্ব (Perpendicular distance)

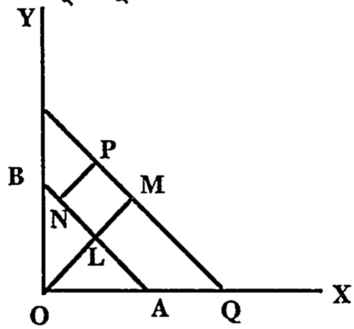
একটি বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার লম্ব দূরত্ব বের করতে হবে।

মনে করি বিন্দুটি P এবং এর স্থানাঙ্ক (x', y'); সরলরেখাটি AB এবং এর সমীকরণ

$x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ ... ... (1)

AB সরলরেখার উপর PN লম্ব আঁকা হলো।

মূলবিন্দু O থেকে AB-এর উপর লম্ব OL



$\therefore OL = p$ এবং $\angle XOL = \alpha$

P বিন্দুতে AB-এর সমান্তরাল করে PQ সরলরেখা আঁকি। রেখাটি OL (প্রয়োজনে বর্ধিত)-কে M বিন্দুতে ছেদ করে এবং মনে করি $OM = p'$.

অতএব, PQ সরলরেখার সমীকরণ $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p'$

যেহেতু, $x' \cos \alpha + y' \sin \alpha = p'$ অথবা, $p' = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha$

অতএব, $PN = ML = OM - OL = p' - p$

$= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p \quad \ldots \quad (2)$

ডান পক্ষের রাশির পরম মানই নির্ণেয় লম্ব দূরত্ব।

(ii) মনে করি সরলরেখাটির সমীকরণ $Ax + By + C = 0$ যেখানে A ও B উভয়ই শূন্য নয়। সমীকরণটি $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ আকারে প্রকাশ করি। প্রদত্ত সমীকরণটিকে $\sqrt{A^2 + B^2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (A, B) এবং $\alpha = \angle XOP$ তাহলে, $OP = \sqrt{a^2 + b^2}$

এবং $\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $p = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ লিখে সরলরেখাটির সমীকরণ দাঁড়ায় $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$

$\therefore$ P_1 বিন্দুতে সরলরেখাটির চিহ্নযুক্ত লম্ব দূরত্ব হবে $x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p$

$$= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} x' + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} y' + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

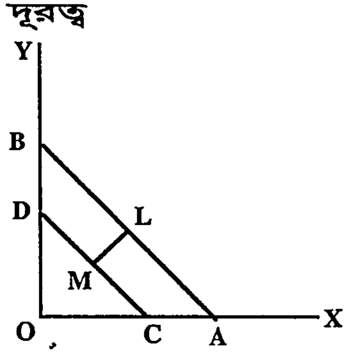
সুতরাং, $Ax + By + C$ রাশিটিতে x, y-এর পরিবর্তে x', y' বসিয়ে যে রাশিটি পাওয়া যায় তাকে $\sqrt{A^2 + B^2}$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগফল পাওয়া যাবে, তার চিহ্ন বর্জিত মান হবে (x', y') বিন্দু থেকে $Ax + By + C = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বটির দৈর্ঘ্য।

দ্রষ্টব্য ঃ (i) লম্ব দূরত্ব সকল সময় ধনাত্মক ধরা হয়। সুতরাং (x', y') বিন্দু থেকে $Ax + By + C = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $\frac{|Ax' + By' + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ কেননা $\sqrt{A^2 + B^2}$ সর্বদা ধনাত্মক রাশি।

(ii) মূলবিন্দু থেকে $Ax + By + C = 0$ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

25. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব

মনে করি সমান্তরাল সরলরেখা দুইটি AB ও CD এর সমীকরণ যথাক্রমে $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$.



L (x_1, y_1) AB সরলরেখার উপর যে কোনো একটি বিন্দু। অতএব, $ax_1 + by_1 + c_1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

L বিন্দু থেকে CD সরলরেখার উপর LM লম্ব আঁকা হল। মনে করি $p = LM$.

$$\therefore p = \frac{|ax_1 + by_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$=\frac{|-c_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ [সমীকরণ (1) থেকে $ax_1+by_1=-c_1$]

$$=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

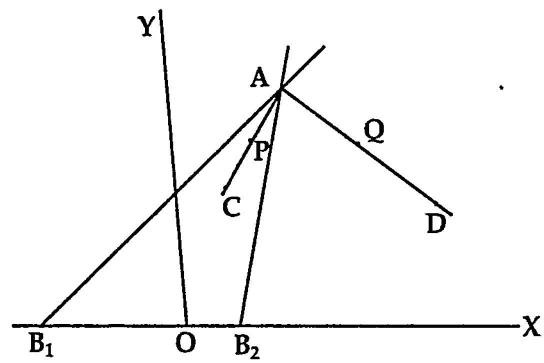
AB সরলরেখার সমীকরণ $ax+by+c_2=0$ এবং CD-এর সমীকরণ $ax+by+c_1=0$ হলে সমান্তরাল রেখা দুইটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব হবে $\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

সুতরাং, $ax+by+c_1=0$ এবং $ax+by+c_2=0$ সমান্তরাল রেখা দুইটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব $=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

26. কোণের সমদ্বিখণ্ডক

দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি AB_1 ও AB_2 সরলরেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$; সমীকরণ দুইটি এমনভাবে লেখা হয়েছে যাতে c_1 এবং c_2 দুইটি ধ্রুবকই ধনাত্মক।



মনে করি AC এবং AD সরলরেখা দুইটি AB_1 এবং AB_2 রেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক।

$\angle B_1AB_2$ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর P একটি বিন্দু নিই এবং মনে করি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y') ; যেহেতু AC এমন বিন্দুসমূহের সেট, AB_1 এবং AB_2 থেকে যাদের প্রত্যেকটির লম্ব দূরত্বের মান সমান, অতএব,

$$\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখানে (x', y') এবং মূলবিন্দু, AB_1 এবং AB_2 সরলরেখার ধনাত্মক দিকে অবস্থিত বলে দুইটি লম্ব দূরত্বের দৈর্ঘ্যই ধনাত্মক। অনুরূপভাবে, AD সমদ্বিখণ্ডকের উপর $Q(x', y')$ যে কোনো বিন্দু হলে আমরা পাই,

$$\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এখানে (x', y') ও মূলবিন্দু, AB_2 সরলরেখার বিপরীত পাশে। অতএব, (x', y') থেকে $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব হবে ঋণাত্মক কিন্তু (x', y') ও মূলবিন্দু, $a_1x+b_1y+c_1=0$ রেখার ধনাত্মক পাশে বলে (x', y') থেকে $a_1x+b_1y+c_1=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব হবে ধনাত্মক।

(1) এবং (2) থেকে দেখা যাচ্ছে সে সমদ্বিখণ্ডক দুইটির সমীকরণ হবে—$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

অনুরূপভাবে $x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1=p_1$ এবং $x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2=p_2$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ হবে—

$$p_1-x\cos\alpha_1-y\sin\alpha_1=\pm(p_2-x\cos\alpha_2-y\sin\alpha_2)$$

দ্রষ্টব্য ঃ (i) উপরোক্ত সমদ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পর লম্ব।

(ii) কোনো ক্ষেত্রে যদি বিশেষ একটি সমদ্বিখণ্ডক চাওয়া হয় তবে প্রয়োজনে চিত্রের সাহায্যে সেটি চিহ্নিত করতে হবে। চিত্রে সমদ্বিখণ্ডকের ঢালের চিহ্ন বিবেচনা করে সঠিক সমদ্বিখণ্ডক নির্ণয় করতে হবে।

(iii) যে দ্বিখণ্ডক, সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূত সূক্ষ্ম কোণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তা প্রদত্ত যে কোনো একটি সরলরেখার সাথে 45° কোণের চেয়ে ছোট কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং, যদি দেখা যায় যে একটি দ্বিখণ্ডক ও একটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণের ট্যানজেন্ট একের চাইতে কম তবে ঐ দ্বিখণ্ডকটি প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. $12x-5y=7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রেখা $12x-5y-7=0$ এর সমান্তরাল যে কোনো রেখার সমীকরণ $12x-5y+c=0$

দুইটি সমান্তরাল রেখার দূরত্বের ফরমূলা থেকে প্রশ্নানুসারে পাই,

$$2=\frac{|c+7|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{c+7}{13}$$

$\therefore\ 26=c+7$ অথবা, $26=-c-7$

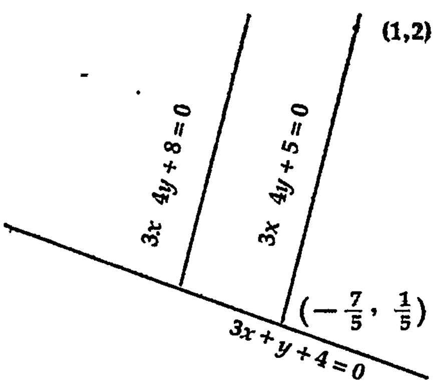
সুতরাং $c=19$ অথবা, $c=-33$

নির্ণেয় সরলরেখা $12x-5y+19=0$

অথবা, $12x-5y-33=0$. এখানে দুইটি উত্তরই গ্রহণযোগ্য।

উদা. 2. $3x-4y+8=0$ রেখার সমান্তরাল দিকে $3x+y+4=0$ রেখা থেকে (1, 2) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৮; রা. বো. ২০০২]

এখানে (1, 2) বিন্দুগামী $3x-4y+8=0$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা যে বিন্দুতে $3x+y+4=0$ সরলরেখাকে ছেদ করে, সেই বিন্দুর এবং (1, 2) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।



$3x-4y+8=0$ রেখার সমান্তরাল যে কোনো সরলরেখা $3x-4y+k=0$, যেখানে k একটি ধ্রুবক। এই সরলরেখা (1, 2) বিন্দুগামী হবে $\Leftrightarrow 3-8+k=0$ বা, $k=5$

$\therefore$ রেখাটি $3x-4y+5=0$ ... ... (i)

প্রদত্ত রেখা, $3x+y+4=0$ ... ... (ii)

(ii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই

$5y-1=0 \quad \therefore y=\frac{1}{5}$

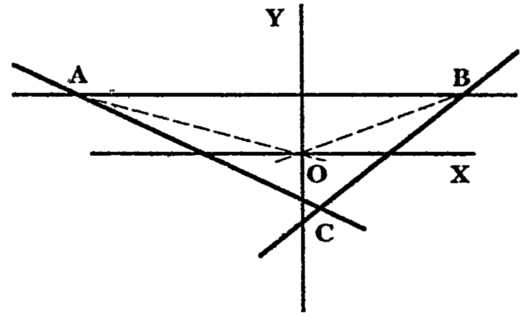
$3x=-y-4=-\frac{1}{5}-4=-\frac{21}{5}\ \therefore x=-\frac{7}{5}$

অতএব, $3x-4y+5=0$ এবং $3x+y+4=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right)$

সুতরাং নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{\left(1+\frac{7}{5}\right)^2+\left(2-\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{81}{25}}=\sqrt{\frac{225}{25}}=\sqrt{9}$

$=3$ (উত্তর)

উদা. 3. দেখাও যে, $y = 1, 3x - 4y = 5$ এবং $5x + 12y + 13 = 0$ রেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত।



চিত্রে ত্রিভুজটি দেখানো হয়েছে।

আমরা জানি ত্রিভুজের কোণ তিনটির অন্তর্দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু। সেই বিন্দুটিকে ত্রিভুজের অন্তবিন্দু বলা হয়।

মনে করি AB রেখাটি $y = 1$

BC রেখাটি $3x - 4y = 5$

এবং AC রেখাটি $5x + 12y + 13 = 0$

$\angle B$ কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ

$$\frac{1-y}{1} = \pm\frac{-3x+4y+5}{5}$$

অর্থাৎ, $x - 3y = 0$ ... ... (i)

এবং $3x + y - 10 = 0$ ... ... (ii)

স্পষ্টত অন্তর্দ্বিখণ্ডের ঢাল ধনাত্মক। সুতরাং $\angle B$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $x - 3y = 0$

$\angle A$ কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ—

$$\frac{1-y}{1} = \pm\frac{5x+12y+13}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

অথবা, $13 - 13y = \pm(5x + 12y + 13)$

অর্থাৎ, $x + 5y = 0$ ... ... (iii)

এবং $5x - y + 26 = 0$ ... ... (iv)

স্পষ্টত কোণ $\angle A$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকের ঢাল ঋণাত্মক। সুতরাং $\angle B$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ $x + 5y = 0$.

OB এবং OA সমদ্বিখণ্ডক দুইটি x-অক্ষের সাথে যথাক্রমে সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ গঠন করে। অতএব, তাদের ঢাল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক।

$\therefore$ OB-এর সমীকরণ, $x - 3y = 0$

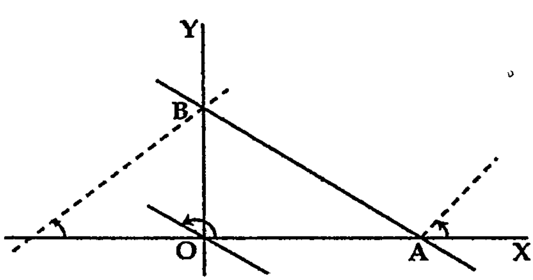
OA-এর সমীকরণ, $x + 5y = 0$

$\angle A$ ও $\angle B$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক দুইটির ছেদবিন্দু $(0, 0)$;

অতএব কোণ $\angle C$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকও এই একই বিন্দুতে অপর দুইটি অন্তর্দ্বিখণ্ডককে ছেদ করে।

সুতরাং ত্রিভুজের অন্তকেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত।

উদা. 4. $5x + 12y = 15$ এবং অক্ষ দুইটি সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের কোণ তিনটির বহির্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।



$5x + 12y = 15$ রেখাটি অক্ষ দুইটিকে A ও B চিহ্নতে ছেদ করে।

$\therefore$ OAB বিবেচনাধীন ত্রিভুজ। (চিত্রে ত্রিভুজটি দেখান হয়েছে)।

$\angle A$ কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় $\dfrac{5x+12y-15}{\sqrt{5^2+12^2}} = \pm y$

অথবা, $5x + 12y - 15 = \pm 13y$

অর্থাৎ, $5x - y - 15 = 0$ ... (1)

এবং $x + 5y - 3 = 0$ ...(2)

B কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ $\dfrac{5x+12y-15}{\sqrt{5^2+12^2}} = \pm x$

অর্থাৎ, $5x+12y-15=\pm 13x$

অর্থাৎ, $8x-12y+15=0$ ... ... (3)

এবং $6x+4y-5=0$ ... ... (4)

$\angle AOB$ কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ $x=\pm y$

অর্থাৎ, $x-y=0$ ... ... (5)

এবং, $x+y=0$ ... ... (6)

চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে A ও B কোণ দুইটির বহির্দ্বিখণ্ডকের ঢাল ধনাত্মক। সুতরাং, এদের বহির্দ্বিখণ্ডক দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $5x-y-15=0$ এবং $8x-12y+15=0$. $\angle AOB$-এর বহির্দ্বিখণ্ডকের ঢাল ঋণাত্মক। সুতরাং, তার সমীকরণ $x+y=0$. (উত্তর)

উদা. 5. $2x+y+3=0$ এবং $3x-4y+7=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০৪]

রেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ,

$$\frac{2x+y+3}{\sqrt{5}}=\pm\frac{3x-4y+7}{\sqrt{25}},$$

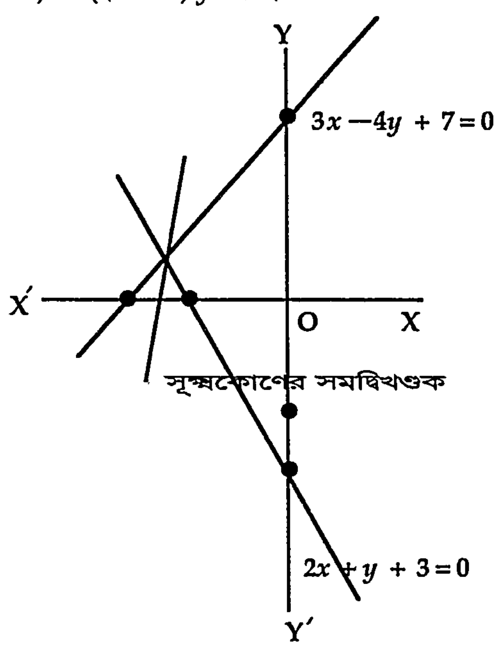
অথবা, $\dfrac{2x+y+3}{\sqrt{5}}=\pm\dfrac{3x-4y+7}{5}$

অথবা, $2x+y+3=\pm\dfrac{(3x-4y+7)}{\sqrt{5}}$

অথবা, $2\sqrt{5}x+\sqrt{5}y+3\sqrt{5}=\pm(3x-4y+7)$

+ চিহ্ন নিয়ে পাই, $(2\sqrt{5}-3)x+(\sqrt{5}+4)y+3\sqrt{5}-7=0$ ... ... (1)

− চিহ্ন নিয়ে পাই, $(2\sqrt{5}+3)x+(\sqrt{5}-4)y+3\sqrt{5}+7=0$ ... ... (2)



চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে। অতএব, এর ঢাল (slope) ধনাত্মক। সুতরাং, সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$(2\sqrt{5}+3)x+(\sqrt{5}-4)y+3\sqrt{5}+7=0.$

উদা. 6. এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 6 একক।

$(3, 6)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ, $y-6=m(x-3)$ বা, $mx-y+6-3m=0$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{6-3m}{\sqrt{1+m^2}}=\pm 6$

বা, $(6-3m)^2=36+36m^2$

বা, $27m^2+36m=0$ বা, $3m^2+4m=0$

বা, $m(3m+4)=0, m=0, -\frac{4}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখা, $y-6=0$ অথবা $y-6=-\frac{4}{3}(x-3)$ অর্থাৎ, $4x+3y-30=0$ (উত্তর)

উদা. 7. y-অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দু হতে $3y=4x-10$ রেখার লম্ব দূরত্ব 4 একক, তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০০]

সরলরেখাটির সমীকরণ $3y=4x-10$ বা, $4x-3y-10=0$

মনে করি প্রদত্ত রেখা হতে y-অক্ষের উপরিস্থিত $(0, y_1)$ বিন্দুর লম্ব দূরত্ব 4.

অতএব, $\frac{4\times 0-3\times y_1-10}{\sqrt{4^2+3^2}}=\pm 4$

অর্থাৎ, $\frac{-3y_1-10}{5}=\pm 4$ বা, $-3y_1-10=\pm 20$

$\therefore \quad y_1=-10, \frac{10}{3}$

অতএব, নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -10)$ অথবা, $\left(0, \frac{10}{3}\right)$ (উত্তর)

উদা. 8. $15x-8y+3=0$ এবং $4x+3y+5=0$ সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি y-অক্ষকে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০০]

সমদ্বিখণ্ডক দুইটির সমীকরণ, $\frac{15x-8y+3}{\sqrt{15^2+8^2}}=\pm\frac{4x+3y+5}{\sqrt{4^2+3^2}}$

বা, $\frac{15x-8y+3}{17}=\pm\frac{4x+3y+5}{5}$

বা, $75x-40y+15=\pm(68x+51y+85)$

বা, $7x-91y-70=0$ বা, $x-13y-10=0$

এবং $143x+11y+100=0$

y-অক্ষের উপর যে কোনো বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক শূন্য। অতএব, সমীকরণ দুইটিতে $x=0$ বসিয়ে যথাক্রমে পাই,

$y_1=-\frac{10}{13}, \quad y_2=-\frac{100}{11}$

এখানে $y_1>y_2$

সুতরাং, $PQ=y_1-y_2=-\frac{10}{13}-\left(-\frac{100}{11}\right)=\frac{100}{11}-\frac{10}{13}=\frac{1300-110}{143}=\frac{1190}{143}$

প্রশ্নমালা II C

1. $(4, -2)$ বিন্দু থেকে $5x+12y=3$ রেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর : $\frac{7}{13}$

2. $4y=3(x-4)$ এবং $4y=3(x-1)$ সমান্তরাল রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর : $\frac{9}{5}$

3. $3x-2y=1$ এবং $6x-4y+9=0$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।
[মা. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০৪] উত্তর : $\frac{11}{2\sqrt{13}}$

4. যদি মূলবিন্দু থেকে $x\sec\theta-y\operatorname{cosec}\theta=k$ ও $x\cos\theta-y\sin\theta=k\cos 2\theta$ রেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p ও p' হয়, তবে প্রমাণ কর যে $4p^2+p'^2=k^2$.
[চ. বো. ২০১১, ২০০৩ ; য. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০১]

5. $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখা দুইটি মূল বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী। c-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৮, ২০০০; চ. বো. ২০০৬, ২০০৪ ; য. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০৪, ২০০৩] উত্তর ঃ $c = 10$

6. $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০, ২০০৬; কু. বো. ২০০৮, ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৭, ২০০৩ ; চ . বো. ২০০৭, ২০০১] উত্তর ঃ $12x - 5y + 19 = 0$; $12x - 5y - 33 = 0$

7. (i) $5x+12y-2 = 0$ এবং $5x + 12y + 29 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\frac{31}{13}$

(ii) $4x - 3y + 2 = 0$ এবং $8x - 6y - 9 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৫] উত্তর ঃ $\frac{13}{10}$

8. দেখাও যে, $(\sqrt{5}, 0)$ ও $(-\sqrt{5}, 0)$ বিন্দু দুইটি হতে $2x \cos \alpha - 3y \sin \alpha = 6$-এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল α মুক্ত হবে। [রা. বো. ২০০৭ ; কু. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০১]

9. দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি থেকে $3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$-এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত হবে। [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৩]

10. $(3, 2)$ ও $(7, 3)$ বিন্দু দুইটি $2x - 5y + 3 = 0$ রেখার একই পাশে অথবা বিপরীত পাশে অবস্থিত কিনা নির্ণয় কর। বিন্দু দুইটির কোন্‌টি রেখাটির যে পাশে মূলবিন্দু সেই পাশে অবস্থিত। উত্তর ঃ বিপরীত পাশে ; $(7,3)$

11. দেখাও যে, মূলবিন্দু ও $(1, 6)$ বিন্দুটি $x - y + 4 = 0$ ও $x + 2y - 4 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্ভূত দুইটি বিপ্রতীপ কোণের মধ্যে অবস্থিত।

12. $(1, -2)$ বিন্দু থেকে $7\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x + 4y = 7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০২] উত্তর ঃ (i) $6x + 8y = 65$, (ii) $6x + 8y + 85 = 0$.

13. $4x - 4y + 3 = 0$ ও $x + 7y - 2 = 0$ রেখা দুইটির অন্তর্গত কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, দ্বিখণ্ডক দুইটি পরস্পর লম্ব। এদের কোন্‌টি মূল বিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডক ? [য. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $16x - 48y + 23 = 0$; $24x + 8y + 7 = 0$; পরবর্তী দ্বিখণ্ডকটি।

14. দেখাও যে $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ বিন্দুটি $2x - 3y + 4 = 0$ এবং $6x + 4y - 7 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী। [য. বো. ২০০৬; মা. বো. ২০১১]

15. মূলবিন্দু থেকে সরল রেখাসমূহের দূরত্ব 7 এবং তারা $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব। রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১১; সি. বো. ২০১১, ২০০৬; চ. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০২; রা. বো. ২০০৯; মা. বো. ২০০৯] উত্তর ঃ $4x + 3y \pm 35 = 0$.

16. এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যেগুলি $y - 2x + 2 = 0$ এবং $y - 3x + 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে গমন করে এবং মূলবিন্দু থেকে যাদের দূরত্ব $7/\sqrt{2}$ একক। উত্তর ঃ $x + y = 7$; $17x + 31y = 175$.

17. এমন সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল -1 এবং মূলবিন্দু থেকে যার দূরত্ব 4 একক। [সি. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৬] উত্তর ঃ $x + y \pm 4\sqrt{2} = 0$

18. $4x - 3y = 8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১০, ২০০৮; চ. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৭, ২০০২ ; য. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০০৫, ২০০৩] উত্তর ঃ $4x - 3y + 2 = 0$; $4x - 3y - 18 = 0$

19. $(\sqrt{3}, 1)$ বিন্দু থেকে $x\sqrt{3} - y + 8 = 0$ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং এই লম্ব x-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৭] উত্তর ঃ 5; 150°

20. একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটির সমীকরণ $3x + 4y - 12 = 0$, $12x - 5y = 0$ এবং $4x + 3y - 10 = 0$; ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\left(\frac{43}{49}, \frac{111}{49}\right)$

21. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(0,0)$, $(0,3)$ এবং $(4,0)$; ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।
[সি. বো. ২০১১; কু. বো. ২০১০] উত্তর ঃ $(1, 1)$

22. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $x = 3, y = 4$ এবং $4x + 3y = 12$; তার কোণ তিনটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $y = x + 1; x + 2y = 8; 3x + y = 9$

23. দেখাও যে, $4x + 7y - 26 = 0$ রেখার উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দু $3x + 4y - 12 = 0$ এবং $5x + 12y - 52 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

24. P বিন্দু থেকে $2x + y - 1 = 0, x + 2y + 1 = 0$ রেখার উপর অংকিত লম্ব দুইটির সংখ্যা সূচক অনুপাত $2 : 1$; দেখাও যে, P-এর সঞ্চারপথ দুইটি সরলরেখা সমন্বিত। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $4x + 5y + 1 = 0, y + 1 = 0$

25. $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক y-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ-এর দূরত্ব স্থির কর। [রা. বো. ২০১১, ২০০৩ ; য. বো. ২০০৭ ; সি. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০০] উত্তর ঃ $1\frac{1}{3}$

26. $3x - 4y = 2$ ও $4x - 3y = -1$ রেখা দুইটির মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
উত্তর ঃ $7x - 7y - 1 = 0$

27. $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটির অন্তর্গত স্থূল কোণের সমদ্বিণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[দি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $y + x + 2 = 0$

28. $12x - 5y + 26 = 0$ রেখা থেকে 2 একক দূরে এবং $x + 5y = 13$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\left(1, \frac{12}{5}\right); \left(-3, \frac{16}{5}\right)$

29. দেখাও যে $(0, 1)$ বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$-এর অন্তর্ভূত কোণদ্বয়ের একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। [কু. বো. ২০১১, ২০০৩; য. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৮, ২০০৪; রা. বো. ২০০৬, ২০০১ ; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০২, ২০০১ ; মা. বো. ২০০৫]

30. $4x + 3y = 7$ ও $2y - 5 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী এবং $3x + 2y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\left(-\frac{1}{14}, \frac{73}{28}\right); \left(\frac{1}{16}, \frac{77}{32}\right)$

31. যদি (x, y) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখা দুইটি থেকে সমদূরবর্তী হয়, তবে দেখাও যে $x + 7y = 0$ অথবা, $7x - y + 2 = 0$। [চ. বো. ২০০২]

32. মূলবিন্দু এবং $x - y - 4 = 0, 7x + y + 20 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুর সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে এটি রেখা দুইটির অন্তর্ভূত একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

33. দেখাও যে, $2x - y - 21 = 0, x - 2y + 15 = 0$ এবং $x - y - 2 = 0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু এবং তৃতীয় রেখাটি প্রথম ও দ্বিতীয় রেখার অন্তর্ভূত কোণসমূহের যে কোনো একটির সমদ্বিখণ্ডক।

34. দেখাও যে, মূলবিন্দু এবং $(1, 2)$ বিন্দু দুইটি $2x + 3y - 4 = 0$ রেখার দুই পাশে অবস্থিত। $(0, 0)$ এবং $(1, 2)$ -এর সংযোগ রেখা যে বিন্দুতে $2x + 3y - 4 = 0$-কে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

35. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x + 3y - 5 = 0$ ও $3x + 2y - 7 = 0$ রেখা দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। [মা. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $x - y = 0, x + y = 0$

36. (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ সরলরেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা, $7a - b + 2 = 0$. [রা. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৮, ২০০১; ব. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০৮]

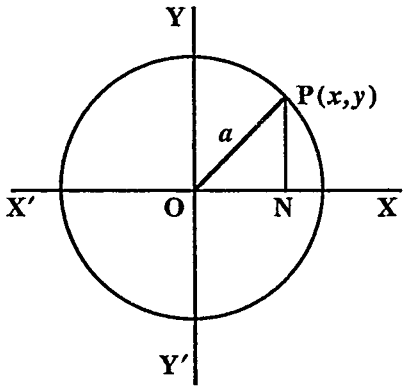
তৃতীয় অধ্যায়

বৃত্ত

CIRCLE

27. কেন্দ্র, মূলবিন্দু এবং ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

সংজ্ঞা ঃ সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হতে নির্দিষ্ট দূরত্বে চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে বৃত্ত বলা হয়। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বৃত্তের কেন্দ্র (centre) এবং নির্দিষ্ট দূরত্বকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ (radius) বলে।



উদা. 2. (পৃঃ ১৭) হতে আমরা জানি, ঐ সঞ্চারপথের তথা নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$. ... ... (i)

28. কেন্দ্র (h, k) এবং ব্যাসার্ধ a বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

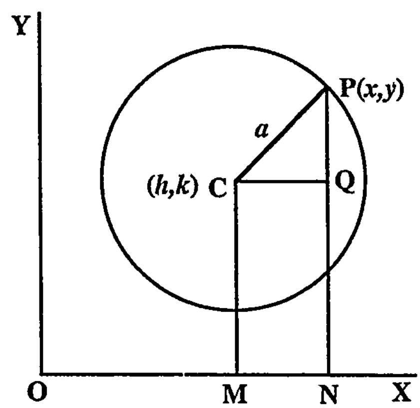
কেন্দ্র C হলে $P(x, y)$ বিন্দুটি নির্ণেয় বৃত্তের উপরস্থ হবে

$\Leftrightarrow CP = a$ তথা $CP^2 = a^2$ হয়।

দূরত্বের সূত্রানুযায়ী $CP^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$.

সুতরাং $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ ... ... (ii)

এটিও নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ।



বিশেষ ক্ষেত্র ঃ কেন্দ্র মূলবিন্দু হলে বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 = a^2$

সরল করলে (ii) সমীকরণটি দাঁড়ায়

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - a^2 = 0$

$h = -g, k = -f$ এবং $h^2 + k^2 - a^2 = c$ লিখে আমরা পাই,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ... (iii)

এটিই বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ। বৃত্তের সাধারণ সমীকরণে আমরা নিচের বৈশিষ্ট্যগুলি দেখতে পাই,

(i) এটি x, y সংবলিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণ

(ii) x^2 এবং y^2-এর সহগ সমান

(iii) xy সংবলিত পদটি অনুপস্থিত

বৃত্তটি মূলবিন্দু দিয়ে যাবে, কারণ তখন বৃত্তের সমীকরণটি $x = 0$ ও $y = 0$ মান দ্বারা সিদ্ধ হবে।

টীকা ঃ বৃত্তের সাধারণ সমীকরণে তিনটি পরস্পর স্বাধীন ধ্রুবক (g, f, c) রয়েছে। সুতরাং বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্যে তিনটি স্বনির্ভর জ্যামিতিক শর্ত যথেষ্ট।

29. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয়

সমীকরণটি নিম্নের আকারে লেখা যায়,

$(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c$

বা, $(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$

বা, $\{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2=\{\sqrt{g^2+f^2-c}\}^2$

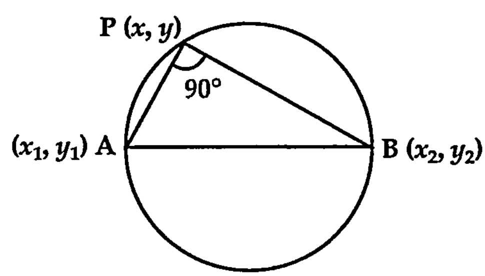
এই সমীকরণটিকে $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ -এর সঙ্গে তুলনা করলে বুঝা যায় যে প্রদত্ত সমীকরণ একটি বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(-g,-f)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$, অবশ্য যদি g^2+f^2-c ধনাত্মক হয় অর্থাৎ, $g^2+f^2>c$ হলে (1) সমীকরণটি একটি বাস্তব বৃত্ত নির্দেশ করে।

মন্তব্য ঃ ১. যদি g^2+f^2-c শূন্য হয়, তবে ব্যাসার্ধ শূন্য হয় এবং এক্ষেত্রে বৃত্তটি তার কেন্দ্রসর্বস্ব হয়। এরূপ বৃত্তকে বিন্দু বৃত্ত (point circle) বলে।

মন্তব্য ঃ ২. যদি g^2+f^2-c ঋণাত্মক হয়, তবে সমীকরণটি কোনো বাস্তব সঞ্চারপথ নির্দেশ করে না, তথাপি অনেক সময় একে কাল্পনিক বৃত্ত বলে উল্লেখ করা হয়।

টীকা ঃ $f=0$ বা, $g=0$ হলে বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে x-অক্ষের বা y-অক্ষের উপর অবস্থিত হবে।

30. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়



মনে করি, $P(x, y)$ বৃত্তের উপরস্থ যে কোনো বিন্দু এবং $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়। $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বিধায় সমকোণ। অতএব AP রেখা ও BP রেখা পরস্পর লম্ব। AP রেখার ঢাল $=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ এবং

BP রেখার ঢাল $=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$.

অতএব, $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\times\dfrac{y-y_2}{x-x_2}=-1$

অর্থাৎ, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$; এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

31. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $(g^2 > c,\ f^2 > c)$ বৃত্তটি দ্বারা অক্ষ দুইটি থেকে ছেদিত অংশের (intercept) পরিমাণ নির্ণয়

মনে করি, বৃত্তটি x-অক্ষকে $(x_1, 0)$ ও $(x_2, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ সমীকরণে $y=0$ লিখলে অর্থাৎ $x^2+2gx+c=0$ সমীকরণ থেকে ছেদবিন্দুর ভুজ পাওয়া যাবে। অতএব, x_1 ও x_2 সমীকরণটির মূল হবে। $\therefore\ x_1+x_2=-2g$ এবং $x_1.x_2=c$

বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষ থেকে ছেদিত অংশের পরিমাণ $=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}$

$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{4g^2-4c}$

$=2\sqrt{g^2-c}$

যদি বৃত্তটি y-অক্ষকে $(0, y_1)$ ও $(0, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষ থেকে ছেদিত অংশ

$$= | y_1 - y_2 | = \sqrt{(y_1 - y_2)} = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2}$$
$$= \sqrt{4f^2 - 4c}$$
$$= 2\sqrt{f^2 - c}$$

টীকা ঃ (*a*) যদি বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে তবে x-অক্ষ থেকে ছেদিত অংশ (0) শূন্য হবে ; তখন $g^2 = c$ এবং বিপরীতক্রমে

(*b*) যদি বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে, অর্থাৎ y-অক্ষের ছেদিত অংশ শূন্য হয়, তখন $f^2 = c$ এবং বিপরীতক্রমে

(*c*) যদি বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে, তাহলে $g^2 = f^2 = c$ এবং বিপরীতক্রমে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. $3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমীকরণটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে পাই, $x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - 2y + \frac{4}{3} = 0$

বা, $\left\{x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right\} + \{y^2 - 2y + 1\} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1 - \frac{4}{3}$

বা, $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{13}{36} = \left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2$

অতএব, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5}{6}, 1\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{\sqrt{13}}{6}$

উদা. 2. (2, 1), (10, 1) এবং (2, —5) বিন্দু তিনটি দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর ; বৃত্তটির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

মনে করি, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$; যেহেতু বৃত্তটি (2, 1), (10, 1) এবং (2, —5) বিন্দু দিয়ে যায়, অতএব,

$4g + 2f + c = -5$ ... ... (i)

$20g + 2f + c = -101$ ... ... (ii)

$4g - 10f + c = -29$ ... ... (iii)

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই, $16g = -96$ বা, $g = -6$

(ii) থেকে (iii) বিয়োগ করে পাই, $16g + 12f = -72$ বা, $-96 + 12f = -72$

বা, $12f = 96 - 72 = 24 \quad \therefore f = 2$

(i)–এ g এবং f-এর মান বসিয়ে পাই, $-24 + 4 + c = -5 \;\therefore\; c = 15$

g, f, c-এর মান বসিয়ে বৃত্তের সমীকরণ পাই,

$x^2 + y^2 - 12x + 4y + 15 = 0$

অথবা, বৃত্তটির সমীকরণ, $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 5^2$

অতএব কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (6, —2) এবং ব্যাসার্ধ 5.

বিকল্প সমাধান ঃ

(2, 1) এবং (10, 1) বিন্দু দুইটি দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ $S \equiv (x-2)(x-10) + (y-1)(y-1) = 0$.

আবার, এই দুইটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত সরলরেখার সমীকরণ

$$y - 1 = \frac{1-1}{10-2}(x-2), \quad \text{বা,} \quad y - 1 = 0$$

অর্থাৎ $L \equiv y - 1 = 0$.

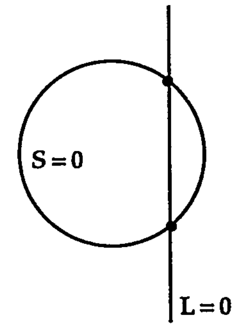
সুতরাং $S = 0$ বৃত্তের এবং $L = 0$ রেখাটির ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ হচ্ছে, $S + KL = 0$

অর্থাৎ $(x-2)(x-10) + (y-1)(y-1) + K(y-1) = 0$ ... ... (i)

যেহেতু (i) বৃত্তটি তৃতীয় বিন্দু (2, — 5) দিয়ে গমন করে, অতএব আমরা পাই,

$$(2-2)(2-10)+(-5-1)(-5-1)+K(-5-1)=0$$

বা, $K=\frac{6\times 6}{6}=6.$



K-এর মান (i)-এ বসিয়ে পাই,

$$x^2-12x+20+y^2-2y+1+6(y-1)=0$$

বা, $x^2+y^2-12x+4y+15=0$ যা নির্ণেয় বৃত্তটির সমীকরণ।

বৃত্তটির সমীকরণকে লেখা যায়,

$$(x-6)^2+(y+2)^2=36+4-15$$

বা, $(x-6)^2+(y+2)^2=5^2$

অতএব, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (6, — 2) এবং ব্যাসার্ধ = 5.

[বিঃ দ্রঃ উপরিউক্ত সমাধানটিতে S মানে Second বা দ্বিতীয় ঘাতের রাশিমালা ; আর L মানে Linear বা প্রথম ঘাতের রাশিমালা। স্পষ্টতই, দ্বিতীয় ঘাতের রাশিমালা = 0 হচ্ছে একটি বৃত্তের সমীকরণ ; অপরদিকে একঘাতের রাশিমালা = 0 হচ্ছে একটি সরলরেখার সমীকরণ।]

উদা. 3. (3, — 10) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (11, — 16) বিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যদি বৃত্তটির ব্যাসার্ধ a হয় তবে এর সমীকরণ

$(x-3)^2+(y+10)^2=a^2$

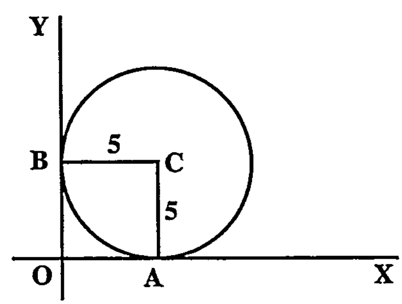
যেহেতু, বৃত্তটি (11, — 16) বিন্দু দিয়ে যায়, অতএব আমরা পাই,

$(11-3)^2+(-16+10)^2=a^2$ বা, $a^2=100$

বৃত্তটির সমীকরণ, $(x-3)^2+(y+10)^2=100$ (উত্তর)

উদা. 4. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রত্যেক অক্ষরেখাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 5 একক দূরত্বে স্পর্শ করে।

আমরা জানি, যে কোনো বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক ও স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাস পরস্পর লম্ব।



A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 0) সুতরাং OA রেখার উপর A বিন্দুগামী লম্বরেখার সমীকরণ $x = 5$. B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 5) সুতরাং OB রেখার উপর B বিন্দুগামী লম্বরেখার সমীকরণ $y = 5$. এই দুইটি লম্ব রেখা (5, 5) বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র C(5, 5) এবং ব্যাসার্ধ $AC=\sqrt{(5-5)^2+(0+5)^2}=5.$

সুতরাং, বৃত্তটির সমীকরণ,

$$(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$$

বা, $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ (উত্তর)

উদা. 5. একটি বৃত্ত y-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (3, — 4) বিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৫]

মনে করি বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$; যেহেতু বৃত্তটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে,

$\therefore f^2-c=0$ এবং $c=0$; অতএব $f=0$

সুতরাং, বৃত্তের সমীকরণ হবে, $x^2+y^2+2gx=0$ ... ... (i)

যেহেতু, বৃত্তটি (3, — 4) বিন্দু দিয়ে যায়, অতএব $9+16+6g=0$ বা, $6g=-25$ বা, $g=-\frac{25}{6}$

অতএব, বৃত্তটির সমীকরণ হবে, $x^2+y^2-2\times\frac{25}{6}x=0$

বা, $x^2+y^2-\frac{25}{3}x=0$

বা, $3x^2+3y^2-25x=0$ (উত্তর)

উদা. 6. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা x-অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডিত করে। [য. বো. ২০১১, ২০০৯; কু. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৯, ২০০০; চ. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৫]

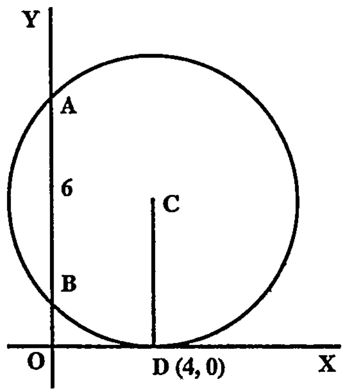
মনে করি, বৃত্তটি x-অক্ষকে $D(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ থেকে $AB = 6$ অংশ ছেদ করে। অতএব, এর কেন্দ্রের ভুজ = 4

এখন বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি k ধরলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= k$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $(x-4)^2 + (y-k)^2 = k^2$

বা, $x^2 + y^2 - 8x - 2ky + 16 = 0$ ... ... (1)

(1)নং সমীকরণে $x = 0$ বসালে বৃত্তটি y-অক্ষের সঙ্গে যে দুইটি বিন্দুতে মিলিত হয় তাদের কোটি পাওয়া যাবে।



$y^2 - 2ky + 16 = 0,\ y = \dfrac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 64}}{2}$

$= k \pm \sqrt{k^2 - 16}$

$AB = OA - OB = (k + \sqrt{k^2-16}) - (k - \sqrt{k^2-16})$

$= 2\sqrt{k^2-16}$

প্রশ্ন অনুসারে, $2\sqrt{k^2-16} = 6$ বা, $\sqrt{k^2-16} = 3$

বা, $k^2 - 16 = 9$

$\therefore\ k = \pm 5$

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0$

প্রশ্নমালা III A

1. বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
   (i) কেন্দ্র $(-4, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 — উত্তর : $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$
   (ii) কেন্দ্র $(-3, 4)$ এবং ব্যাস 12 — উত্তর : $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$
   (iii) কেন্দ্র (a, b) এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{a^2 + b^2}$ — উত্তর : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$

2. নিচের বৃত্তগুলির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :
   (i) $2(x^2 + y^2) - 3x + 4y = 0$ — উত্তর : $\left(\frac{3}{4}, -1\right), \frac{5}{4}$
   (ii) $x^2 + y^2 = 2gx - 2fy$ — উত্তর : $(g, -f),\ \sqrt{g^2 + f^2}$
   (iii) $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 75 = 0$ — উত্তর : $(3, 4), 10$

3. (i) $(1, 0), (2, -2)$ ও $(3, 1)$ বিন্দু তিনটি দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের সমীকরণ, বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। উত্তর : $x^2 + y^2 - 5x + y + 4 = 0, \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \frac{\sqrt{10}}{2}$

   (ii) $(0, 0), (2a, 0)$ এবং $(0, 2b)$ বিন্দু তিনটি দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের সমীকরণ, বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। উত্তর : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0,\ (a, b),\ \sqrt{a^2 + b^2}$

4. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(9, 4)$ এবং যা $(1, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায়। উত্তর : $x^2 + y^2 - 18x - 8y - 3 = 0$

5. একটি বৃত্ত $(-6, 5), (-3, -4)$ এবং $(2, 1)$ বিন্দু তিনটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাস নির্ণয় কর। মূলবিন্দু কি বৃত্তের ভিতরে না বাইরে অবস্থিত ? [দি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০২; মা. বো. ২০০৮]

   উত্তর : $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0, (-3, 1), 10$; ভিতরে।

6. (i) $2x - y = 3$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০, ২০০১; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০০; কু. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০০] উত্তর : $x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0$

(ii) $x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০১] উত্তর : $x^2 + y^2 - 8x + 7y - 3 = 0$

7. একটি বৃত্ত $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং এর কেন্দ্র (i) $x + 2y - 10 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। [ঢা. বো. ২০০২] (ii) x-অক্ষের উপর অবস্থিত, [কু. বো. ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০৩] (iii) y-অক্ষের উপর অবস্থিত ; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৮]

উত্তর : (i) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$; (iii) $x^2 + y^2 + 18y - 124 = 0$

8. একটি বৃত্তের (i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(1, -3)$ এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে, (ii) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-2, -4)$ এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর : (i) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ (ii) $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 16 = 0$

9. একটি বৃত্ত মূল বিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষ দুইটির ধনাত্মক দিক থেকে যথাক্রমে 3 ও 5 অংশ ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৬, ২০০৩, ২০০১; রা. বো. ২০১১, ২০০৬, ২০০১; য. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৮, ২০০৪; সি. বো. ২০০৭, ২০০২ ; চ. বো. ২০০৫, ২০০১; মা. বো. ২০০৩] উত্তর : $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 0$

10. (i) $(1, 1)$ ও $(2, 2)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রমকারী, বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 ; বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এরূপ দুইটি বৃত্ত পাওয়া যাবে। [য. বো. ২০০৩] উত্তর : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0, x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

(ii) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক। [ব. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৫] উত্তর : $x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{21}\, y - 4 = 0$

11. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [কু. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০৪] উত্তর : $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 8 = 0$

12. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(4, 5)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। [য. বো. ২০১১, ২০০০; কু. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০৪, ২০০২; ব. বো. ২০০৯, ২০০৫; সি. বো. ২০০৮, ২০০৫ ; ঢা. বো. ২০০৭, ২০০১; চ. বো. ২০০৬, ২০০৪ ; রা. বো. ২০০৪, ২০০১ ; মা. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৪] উত্তর : $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$

13. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করা যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে $x + y = 3$ রেখার উপর অবস্থিত। [কু. বো. ২০০৮] উত্তর : $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

14. $(0, -1)$ ও $(2, 3)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তটি x-অক্ষ থেকে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। উত্তর : 4

15. $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। এর সমীকরণ ও y-অক্ষ থেকে তা কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তাও নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১; ব. বো. ২০১০, ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০০; রা. বো. ২০০৭, ২০০১; কু. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২; মা. বো. ২০০২]

উত্তর : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$; $2\sqrt{3}$.

16. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, -5)$ এবং এটি মূল বিন্দু দিয়ে যায়। তার সমীকরণ এবং অক্ষ দুইটি থেকে তা কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৬]

উত্তর : $x^2 + y^2 - 8x + 10y = 0$; x-অক্ষ থেকে 8 ; y-অক্ষ থেকে 10.

17. $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটির দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য বের কর। [দি. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০০]

উত্তর : $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0$. $4\sqrt{13}$.

18. $x=0, y=0$ এবং $x=a$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[কু. বো. ২০১১, ২০০৪; ব. বো. ২০০৭ ; রা. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০১]
উত্তর : $x^2+y^2-ax \pm ay+\frac{1}{4}a^2=0$

19. y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (3, 0) ও (7, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ব. বো. ২০১১, ২০০২; রা. বো. ২০০৬, ২০০২] উত্তর : $x^2+y^2-10x \pm 2\sqrt{21}\,y+21=0$

20. দেখাও যে, A(1, 1) বিন্দুটি $x^2+y^2+4x+6y-12=0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। A বিন্দু দিয়ে বৃত্তটির যে ব্যাস অংকন করা যায় তার অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১০, ২০০৪ ; রা. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৭ ; চ. বো. ২০০৪, ২০০১] উত্তর : $(-5, -7)$.

21. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (6, 0) এবং যা $x^2+y^2-4x=0$ বৃত্ত ও $x=3$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। [চ. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৭, ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৭, ২০০২; য. বো. ২০০৬, ২০০১; সি. বো. ২০০৪; মাদ্রাসা বো. ২০০৯] উত্তর : $x^2+y^2-12x+24=0$

22. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ বৃত্ত ও $2x+3y+1=0$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। [চ. বো. ২০১১; য. বো. ২০০২; সি. বো. ২০০২] উত্তর : $x^2+y^2+6x+8y=0$

23. $4\sqrt{2}$ বাহুবিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এর বিপরীত শীর্ষটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত। ঐ বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১০, ২০০৪] উত্তর : $x^2+y^2 \pm 8x=0$

24. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৬]
উত্তর : $x^2+y^2+4x-2\sqrt{3}y+3=0$; $(-2, \sqrt{3}), 2$

25. একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষ দুইটির ধনাত্মক দিক থেকে যথাক্রমে h ও k অংশ ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $x^2+y^2-hx-ky=0$

26. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে -4 একক দূরত্বে y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডন করে। [দি. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৬] উত্তর : $x^2+y^2 \pm 10x+8y+16=0$

27. দেখাও যে, $2x^2+2y^2-3x-4y+1=0$ এবং $16x^2+16y^2-32x-1=0$ বৃত্ত দুইটির প্রতিটির কেন্দ্র, অপরটির পরিধির উপর অবস্থিত।

28. $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y=3x-7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৮, ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৮, ২০০৩, ২০০১; কু. বো. ২০০৭, ২০০৩ ; য. বো. ২০০৬; মা. বো. ২০১০, ২০০৩] উত্তর : $x^2+y^2-5x-y+4=0$

29. এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, 8) বিন্দু দিয়ে যায়।
[সি. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৭, ২০০১ ; য. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৬]
উত্তর : $x^2+y^2-10x-10y+25=0$, $x^2+y^2-26x-26y+169=0$,

30. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা x ও y-অক্ষরেখা থেকে যথাক্রমে 5 এবং 2 একক দৈর্ঘ্যের সমান অংশ কর্তন করে এবং যার কেন্দ্র $2x-y=6$ রেখার উপর অবস্থিত।
উত্তর : $x^2+y^2-5x+2y=0$ এবং $x^2+y^2-11x-10y+24=0$

31. $x^2+y^2-8x+6y+21=0$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি (2, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০১] উত্তর : $y+4x=13$

32. এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (4, 3) এবং যা $x^2+y^2=4$ বৃত্তকে বহিস্থভাবে স্পর্শ করে। [রা. বো. ২০১১, ২০০৭ ; সি. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৬; মা. বো. ২০১১]
উত্তর : $x^2+y^2-8x-6y+16=0$

33. এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3, 4) এবং যা $x^2+y^2=9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।
[চ. বো. ২০১০] উত্তর : $x^2+y^2-6x-8y+21=0$, $x^2+y^2-6x-8y-39=0$

34. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে $(3, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

35. যদি $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ হয় তাহলে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করে।

36. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা মূলবিন্দু ও (p, q) বিন্দু দিয়ে যায়। [য. বো. ২০০৫; সি. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $q(x^2 + y^2) = (p^2 + q^2)y$

37. একটি বৃত্ত $(1, 2)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ. বো. ২০১১, ২০০৮; ঢা. বো. ২০১০, ২০০১; য. বো. ২০১০, ২০০৮; ব. বো. ২০০৯, ২০০৬; সি. বো. ২০০৯, ২০০৭; কু. বো. ২০০৬, ২০০২; মা. বো. ২০০৬, ২০০৪]

উত্তর ঃ $2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + 8 = 0$

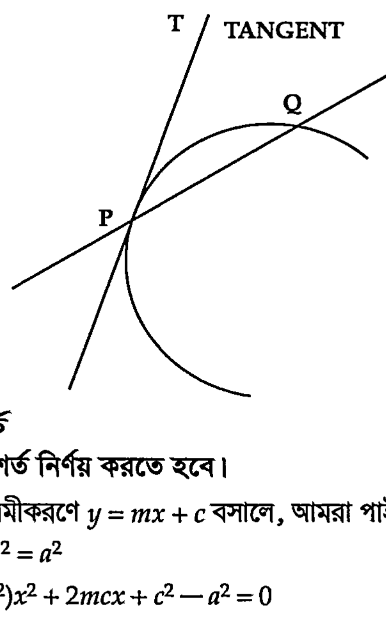
38. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 2y = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তস্থভাবে স্পর্শ করে।

39. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ ও $x^2 + y^2 + 4x - 18y + 36 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিস্থভাবে স্পর্শ করে।

40. b বাহুবিশিষ্ট OABC একটি বর্গ। OA ও OC-কে অক্ষ ধরে প্রমাণ কর যে, বর্গটির পরিবৃত্তের সমীকরণ হবে $x^2 + y^2 = b(x + y)$. [রা. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৫]

32. স্পর্শক (Tangent)

মনে করি, কোনো বক্ররেখার উপর P একটি বিন্দু এবং Q এর উপর অন্য একটি নিকটবর্তী বিন্দু। মনে করি Q বিন্দু বক্ররেখা বরাবর ক্রমশ P-এর নিকটবর্তী হয়ে পরিশেষে P বিন্দুর সঙ্গে সম্পূর্ণ মিলে যায়। ছেদক PQ-এর এই সীমাবস্থানকেই P বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শক বলা হয়।

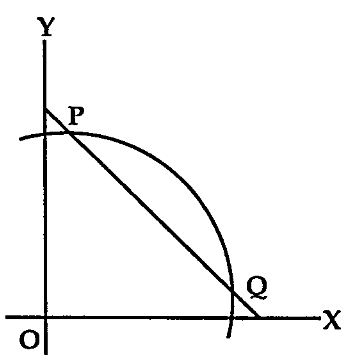


অন্যভাবে বলতে পারি, বক্ররেখার কোনো বিন্দুতে স্পর্শক বলতে দুইটি সমাপতিত বিন্দুর ছেদককে বুঝায়।

যে বিন্দুতে স্পর্শকটি বক্ররেখার সাথে মিলিত হয় সে বিন্দুকে স্পর্শ বিন্দু (point of contact) বলে।

33. কোনো সরলরেখার স্পর্শক হওয়ার শর্ত

$y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত নির্ণয় করতে হবে।



$x^2 + y^2 = a^2$ সমীকরণে $y = mx + c$ বসালে, আমরা পাই,

$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$

অর্থাৎ, $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$

যদি সরলরেখাটি বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে তবে দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজ দুইটি P ও Q বিন্দুর ভুজ নির্দেশ করবে। কিন্তু যদি রেখাটি বৃত্তকে শুধুমাত্র স্পর্শ করে তবে P ও Q সমাপতিত হয় অর্থাৎ দ্বিঘাত সমীকরণটির মূল দুইটি সমান হবে। মূল দুইটি সমান হওয়ার শর্ত

$$4m^2c^2 = 4(1 + m^2)(c^2 - a^2)$$

বা, $m^2c^2 = c^2 - a^2 + m^2c^2 - m^2a^2$

বা, $c^2 = a^2(1 + m^2)$

$(mi + x + mf)^2 = (1+m^2)(c^2 + 2fc + k)$

অর্থাৎ, $c = \pm a\sqrt{a + m^2}$, এটিই নির্ণেয় শর্ত। সুতরাং m-এর সকল মানের জন্য, $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$ রেখা দুইটির প্রতিটিই $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। যেহেতু, এদের ঢাল সমান, সুতরাং, স্পর্শক দুইটি পরস্পর সমান্তরাল। স্পর্শক দুইটির মাঝে বৃত্তটি অবস্থিত এবং স্পর্শ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশ বৃত্তের একটি ব্যাস।

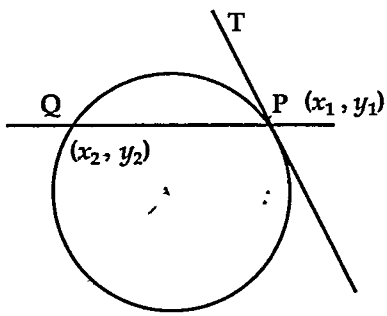
34. স্পর্শকের সমীকরণ

কোনো বৃত্তের উপরিস্থিত (x_1, y_1) বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

(i) মনে করি বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$ ... ... (1)

$P(x_1, y_1)$ প্রদত্ত বিন্দু। $Q(x_2, y_2)$ বৃত্তের উপর অন্য একটি বিন্দু। PQ-এর সমীকরণ,

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$... ... ... (2)



যেহেতু (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি বৃত্তের উপর অবস্থিত, অতএব,

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 = x_2^2 + y_2^2$$

বা, $x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0$

বা, $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 0$

বা, $(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$

বা, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$ ... (3)

অতএব, (2) ও (3)নং সমীকরণ থেকে পাই, $y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1)$

বা, $(x - x_1)(x_1 + x_2) + (y - y_1)(y_1 + y_2) = 0$

এখন মনে করি, Q বিন্দুটি বৃত্তের উপর চলমান হয়ে ক্রমান্বয়ে P-এর নিকটবর্তী হয়, তাহলে সীমাবস্থানে $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$. তখন ছেদক PQ, P বিন্দুতে স্পর্শকের রূপ নেয়।

সুতরাং, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$(x - x_1)2x_1 + (y - y_1)2y_1 = 0$$

বা, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 = a^2$

বা, $xx_1 + yy_1 = a^2$.

(ii) মনে করি বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এবং $P(x_1, y_1)$ প্রদত্ত বিন্দু। $Q(x_2, y_2)$ বৃত্তের উপর অপর একটি বিন্দু। তাহলে,

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$$

এবং $x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0$

বিয়োগ করে পাই,

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + 2g(x_1 - x_2) + 2f(y_1 - y_2) = 0$$

বা, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2g) = -(y_1 - y_2)(y_1 + y_2 + 2f)$

$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}$ ... ... (4)

অতএব, (4)-এর সাহায্যে (2) সমীকরণটি দাঁড়ায়, $y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}(x - x_1)$

বা, $(x - x_1)(x_1 + x_2 + 2g) + (y - y_1)(y_1 + y_2 + 2f) = 0$

Q বিন্দুটি বৃত্তের উপর চলমান হয়ে P-এর নিকটবর্তী হলে সীমাবস্থানে, $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ হয়। তখন ছেদক PQ, P বিন্দুতে স্পর্শকের রূপ নেয়।

সুতরাং $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$(x - x_1)(2x_1 + 2g) + (y - y_1)(2y_1 + 2f) = 0$$

বা, $x(x_1 + g) + y(y_1 + f) = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1 = -(gx_1 + fy_1 + c)$

বা, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

দ্রষ্টব্য : (i) বৃত্তের উপরে কোনো বিন্দু (x_1, y_1)-এ স্পর্শকের সমীকরণ লিখতে নিচের নিয়ম প্রয়োগ করা যায়।

বৃত্তের সমীকরণে ধ্রুবকটিকে অপরিবর্তিত রেখে x^2-কে xx_1, y^2-কে yy_1, $2x$-কে $(x + x_1)$ এবং $2y$-কে $(y + y_1)$ দ্বারা অপসারণ করতে হয়।

(ii) স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ স্পর্শকের উপর লম্ব, বৃত্তের এই ধর্ম ব্যবহার করেও বৃত্তের উপর কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

35. বৃত্তের বহিস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ

মনে করি (x_1, y_1) বৃত্তের বহিস্থ কোনো বিন্দু এবং $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের সমীকরণ। (x_1, y_1) বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত যে কোনো সরল রেখার সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$

অথবা, $y = mx + y_1 - mx_1$ ... ... (1)

সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হলে, আমরা পাই,

$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1 + m^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)নং ও (2)নং সমীকরণ থেকে m অপসারণ করে (x_1, y_1) বিন্দুর মধ্য দিয়ে অংকিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ পাওয়া যাবে। অতএব, স্পর্শক দুইটির সমীকরণ,

$$\{x_1(y - y_1) - y_1(x - x_1)\}^2 = a^2\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\}$$

অথবা, $(x_1y - y_1x)^2 = a^2\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\}$

অথবা, $(x^2 + y^2 - a^2)(x_1^2 + y_1^2 - a^2) = (xx_1 + yy_1 - a^2)^2$

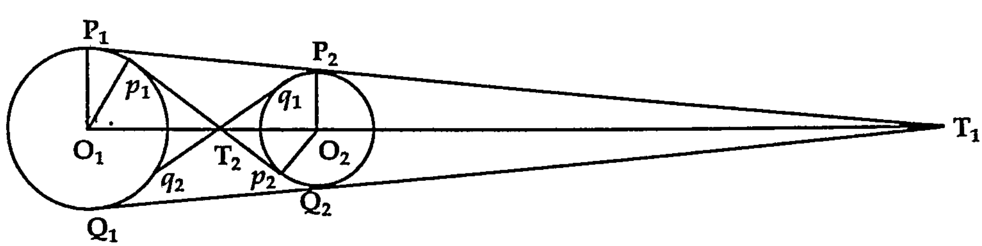
অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে বহিস্থ কোনো বিন্দু (x_1, y_1) থেকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ, $(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)$

$$= \{xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c\}^2$$

সংকেতে প্রকাশ করলে, স্পর্শক দুইটির সমীকরণ, $SS_1 = T^2$.

36. দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক

মনে করি O_1 এবং O_2 দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং r_1 ও r_2 যথাক্রমে তাদের ব্যাসার্ধ। P_1P_2 এবং Q_1Q_2-কে বৃত্ত দুইটির সাধারণ সরল স্পর্শক এবং p_1p_2 ও q_1q_2-কে সাধারণ তির্যক স্পর্শক বলে।



মনে করি স্পর্শকগুলি T_1 এবং T_2 বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\Delta T_1O_1P_1$ এবং $\Delta T_1O_2P_2$ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ এবং আমরা পাই,

$\frac{T_1O_1}{T_1O_2}=\frac{O_1P_1}{O_2P_2}=\frac{r_1}{r_2}$ অনুরূপভাবে, সদৃশ ত্রিভুজ $\Delta\, T_2O_1p_1$ এবং $\Delta T_2O_2p_2$ থেকে পাই, $\frac{T_2O_1}{T_2O_2}=\frac{O_1p_1}{O_2p_2}=\frac{r_1}{r_2}$

অতএব, T_1 এবং T_2 বিন্দু দুইটি O_1O_2-রেখাটিকে বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাতে যথাক্রমে বহির্বিভক্ত ও অন্তর্বিভক্ত করে। বৃত্তের সমীকরণ থেকে আমরা O_1 এবং O_2 বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি। T_1 ও T_2 বিন্দু দুইটি যে অনুপাতে O_1O_2 রেখাকে বহির্বিভক্ত ও অন্তর্বিভক্ত করে তা ব্যাসার্ধের অনুপাত থেকে পাওয়া যায়। সুতরাং, অনুপাত সূত্র প্রয়োগ করে T_1 ও T_2-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।

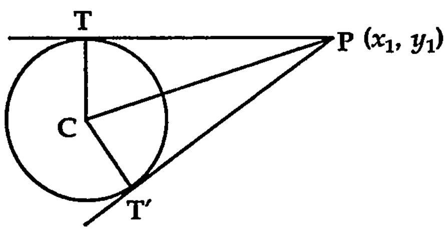
এখন T_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) হলে, T_1-এর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ হবে, $y-y_1=m(x-x_1)$. রেখাটির বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত প্রয়োগ করে আমরা T_1-থেকে অঙ্কিত সরল সাধারণ স্পর্শক দুইটির সমীকরণ পাই। অনুরূপভাবে, T_2-এর মধ্য দিয়ে অংকিত সাধারণ তির্যক স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

37. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

কোনো বহিস্থ বিন্দু (x_1, y_1) থেকে (i) $x^2+y^2=a^2$ এবং (ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), C বৃত্তের কেন্দ্র এবং PT ও PT′ বৃত্তে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শক।

(i) বৃত্তটি যদি $x^2+y^2=a^2$ হয়, তবে কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হবে $(0, 0)$; $PC^2=x_1^2+y_1^2$, $CT=CT'=a$. যেহেতু $\angle PTC$ এবং $\angle PT'C$-এর প্রত্যেকে এক সমকোণ, অতএব,



PT^2 বা $PT'^2=PC^2-CT^2=x_1^2+y_1^2-a^2$

$\therefore$ PT বা, $PT'=\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}$

(ii) যদি বৃত্তটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ হয়, তাহলে কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হবে $(-g, -f)$

$PC^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2$

$CT^2=CT'^2=g^2+f^2-c$

PT^2 বা, $PT'^2 = PC^2-CT^2=(x_1+g)^2+(y_1+f)^2-(g^2+f^2-c)$

$= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$

$\therefore$ PT- বা, $PT'=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য পেতে হলে বৃত্তের সমীকরণ এমনভাবে লিখতে হবে যেন, x^2 এবং y^2-এর সহগ 1 হয় এবং ডান পক্ষ শূন্য হয়। এখন x ও y-এর স্থলে প্রদত্ত বিন্দুর x ও y-স্থানাঙ্ক স্থাপন করলেই স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের বর্গ পাওয়া যাবে।

38. দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা

মনে করি, বৃত্ত দুইটি $S_1=x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$

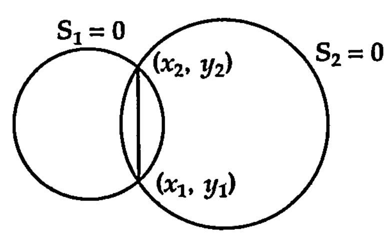
এবং $S_2=x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$

যদি (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বৃত্ত দুইটির ছেদবিন্দু হয়, তবে,

$(x_1^2+y_1^2+2g_1x_1+2f_1y_1+c_1)-(x_1^2+y_1^2+2g_2x_1+2f_2y_1+c_2)=0$

অথবা, $2(g_1-g_2)x_1+2(f_1-f_2)y_1+c_1-c_2=0$

অনুরূপভাবে, $2(g_1-g_2)x_2+2(f_1-f_2)y_2+c_1-c_2=0$



দেখা যাচ্ছে যে, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি $2(g_1-g_2)x+2(f_1-f_2)y+c_1-c_2=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে।

সমীকরণটি x, y সংবলিত একঘাত সমীকরণ অতএব, এটি একটি সরলরেখার সমীকরণ এবং এটিই বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা। দেখা যাচ্ছে দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ $S_1-S_2=0$ যেখানে বৃত্ত দুইটির সমীকরণে x^2 ও y^2-এর সহগ 1 এবং সমীকরণদ্বয়ের ডান পক্ষ শূন্য।

39. অভিলম্ব (Normal)

কোনো বক্ররেখার স্পর্শকের স্পর্শ বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাটিকে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখার অভিলম্ব বলা হয়। বৃত্তের কোনো বিন্দু (x_1, y_1)-এ বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$; (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$xx_1+yy_1=a^2 \text{ বা, } y=-\frac{x_1}{y_1}x+\frac{a^2}{y_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

(x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

যদি (ii) সরলরেখাটি বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্ব হয় তবে এটি অবশ্যই (i) স্পর্শকের লম্ব হবে।

$$\therefore \quad m\left(-\frac{x_1}{y_1}\right)=-1 \text{ অর্থাৎ, } m=\frac{y_1}{x_1}$$

অর্থাৎ, (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1) \quad \text{অর্থাৎ, } x_1y-y_1x=0$$

অনুরূপভাবে, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে

$$(x_1+g)y-(y_1+f)x+fx_1-gy_1=0$$

দ্রষ্টব্য ঃ বৃত্তের অভিলম্ব বৃত্তটির কেন্দ্রগামী।

উদাহরণমালা

উদা. 1. $y=mx$ রেখাটি $x^2+y^2+2gx+c=0$ বৃত্তের স্পর্শক হলে m-এর মান নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে মূলবিন্দু থেকে $x^2+y^2-10x+20=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা. বো. ২০১১]

$$y=mx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$x^2+y^2+2gx+c=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1) থেকে y-এর মান (2)–এ বসিয়ে আমরা (1) রেখা ও (2) বৃত্তের ছেদবিন্দুর ভুজ পাই এবং সমীকরণটি হলো

$$x^2+m^2x^2+2gx+c=0$$

অর্থাৎ, $x^2(1+m^2)+2gx+c=0$

এই সমীকরণের মূল দুইটি সমান হলে (1) রেখাটি (2) বৃত্তের স্পর্শক হবে।

$$\therefore\ 4g^2=4c(1+m^2)$$

অর্থাৎ, $cm^2=g^2-c$ বা, $m=\pm\sqrt{\dfrac{g^2-c}{c}}$

মনে করি মূলবিন্দু থেকে $x^2+y^2-10x+20=0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ $y=mx$

প্রশ্নের প্রথম অংশ থেকে $c = 20, g = -5$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$m = \pm\sqrt{\frac{25-20}{20}} = \pm\frac{1}{2}$$

অতএব, নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ, $y = \pm\frac{1}{2}x$

উদা. 2. $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ **বৃত্তের** $(4, -11)$ **বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

এখানে, $x_1 = 4, y_1 = -11$ [সি. বো. ২০১০, ২০০২; রা. বো. ২০০৯]

বৃত্তের সমীকরণটি নিম্নভাবে লিখা যায় ঃ $x^2 + y^2 - 2.\frac{3}{2}x + 2.5y - 15 = 0$

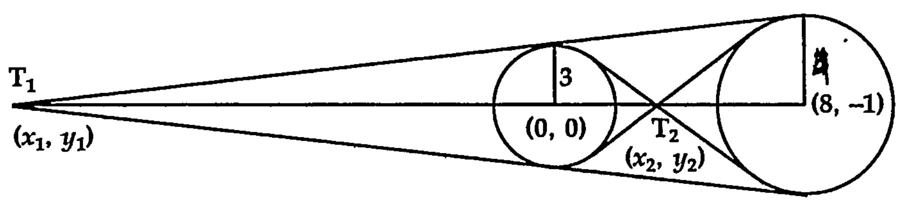
তাহলে, নির্ণেয় সমীকরণ হবে, $4x - 11y - \frac{3}{2}(x+4) + 5(y-11) - 15 = 0$

বা, $5x - 12y - 152 = 0$

উদা. 3. $x^2 + y^2 = 9$ **এবং** $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 49 = 0$ **বৃত্ত দুইটির সাধারণ স্পর্শক নির্ণয় কর।**

দ্বিতীয় বৃত্তটির সমীকরণ $(x-8)^2 + (y+1)^2 = 4^2$

অতএব, দেখা যাচ্ছে প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ 3 এবং দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $(8, -1)$ ও ব্যাসার্ধ 4.



সরল সাধারণ স্পর্শক দুইটির ছেদবিন্দু T_1-এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) হলে, $x_1 = \dfrac{4\times0-8\times3}{4-3} = -24$

$$y_1 = \frac{4\times0-(-1)\times3}{4-3} = 3$$

T_1-এর মধ্য দিয়ে অংকিত যে কোনো রেখার সমীকরণ, $y - 3 = m(x+24)$ বা, $mx - y + 3 + 24m = 0$

সরলরেখাটি সাধারণ স্পর্শক হলে, আমরা পাই,

$$\frac{3+24m}{\sqrt{1+m^2}} = 3, \frac{1+8m}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \quad \text{বা, } 63m^2 + 16m = 0$$

বা, $m(63m+16) = 0 \therefore m = 0, -\frac{16}{63}$

অতএব, সরল সাধারণ স্পর্শক দুইটির সমীকরণ, $y - 3 = 0$;

এবং $y - 3 = -\frac{16}{63}(x+24)$ অর্থাৎ, $16x + 63y + 195 = 0$ (উত্তর-১)

সাধারণ তির্যক স্পর্শক দুইটির ছেদবিন্দু T_2-এর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2) হলে,

$$x_2 = \frac{4\times0+3\times8}{3+4} = \frac{24}{7} \quad y_2 = \frac{4\times0+3\times(-1)}{3+4} = -\frac{3}{7}$$

T_2-এর মধ্য দিয়ে অংকিত যে কোনো রেখার সমীকরণ, $y + \frac{3}{7} = m\left(x - \frac{24}{7}\right)$

বা, $7mx - 7y - 24m - 3 = 0$

রেখাটি সাধারণ স্পর্শক হলে, $\frac{-24m-3}{7\sqrt{1+m^2}}=3$

বা, $-8m-1=7\sqrt{1+m^2}$

বা, $15m^2+16m-48=0$

বা, $(3m-4)(5m+12)=0 \quad \therefore\ m=\frac{4}{3}, -\frac{12}{5}$

অতএব, সাধারণ তির্যক স্পর্শক দুইটির সমীকরণ,

$y+\frac{3}{7}=\frac{4}{3}\left(x-\frac{24}{7}\right)$

বা, $21y+9=28x-96$ বা, $28x-21y-105=0$ বা, $4x-3y-15=0$;

এবং $y+\frac{3}{7}=-\frac{12}{5}\left(x-\frac{24}{7}\right)$

বা, $35y+15=-84x+288$ বা, $84x+35y-273=0$ বা, $12x+5y-39=0$ (উত্তর-২)

উদা. 4. $x^2+y^2=b(5x-12y)$ বৃত্তে অঙ্কিত ব্যাস মূলবিন্দু দিয়ে যায়। এই ব্যাসের সমীকরণ এবং মূলবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৪]

প্রদত্ত বৃত্তটি, $x^2+y^2-5bx+12by=0$; কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5b}{2}, -6b\right)$

অতএব, মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত ব্যাসের সমীকরণ,

$$y=\frac{-6b}{\frac{5b}{2}}x \text{ বা, } y=-\frac{12}{5}x \text{ বা, } 12x+5y=0 \quad \text{(উত্তর-১)}$$

প্রদত্ত বৃত্তটির মূলবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক উক্ত ব্যাসের উপর লম্ব হবে। সুতরাং, নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $5x-12y=0$. (উত্তর-২)

উদা. 5. $3x+by-1=0$ রেখাটি $x^2+y^2-8x-2y+4=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b-এর মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১১; কু. বো. ২০১০, ২০০৪; য. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৮, ২০০১; সি. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০২, ২০০০; মা. বো. ২০০৫]

প্রদত্ত বৃত্ত, $x^2+y^2-8x-2y+4=0$

$$\Rightarrow (x-4)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2$$

বৃত্তের কেন্দ্র $(4, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{13}$

$\because$ $3x+by-1=0$ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করে।

$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র $(4, 1)$ হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\sqrt{13}$-এর সমান।

অর্থাৎ $\frac{|3.4+b.1-1|}{\sqrt{3^2+b^2}}=\sqrt{13}$

বা, $\frac{(b+11)^2}{9+b^2}=13$ [বর্গ করে]

বা, $b^2+22b+121=13b^2+117$

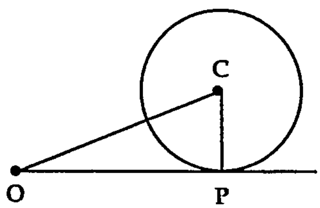
বা, $12b^2-22b-4=0$

বা, $6b^2-11b-2=0$

বা, $(b-2)(6b+1)=0$

$\therefore$ $b=2$ বা, $-\frac{1}{6}$ (উত্তর)

উদা. 6. মূলবিন্দু থেকে (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2 একক। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১০, ২০০৬; চ. বো. ২০০৭, ২০০৪; সি. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০০]



মনে করি, O মূলবিন্দু, C (1, 2) বৃত্তটির কেন্দ্র এবং মূলবিন্দু O থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু P

অতএব, CP, OP-এর লম্ব এবং $OP = 2$

আমরা পাই, $OC^2 = OP^2 + CP^2$, বা, $CP^2 = OC^2 - OP^2$

বা, $CP^2 = 1^2 + 2^2 - 4 = 1$

অতএব, বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

বা, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

উদা. 7. x-অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ হতে 6 একক দৈর্ঘ্যের জ্যা কর্তন করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১১, ২০০৯; চ. বো. ২০১১, ২০০৯; কু. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৫]

মনে করি, O মূলবিন্দু, P (4, 0) স্পর্শ বিন্দু এবং $AB = 6$

C বিন্দু থেকে CD, AB-এর উপর লম্ব আঁকি।

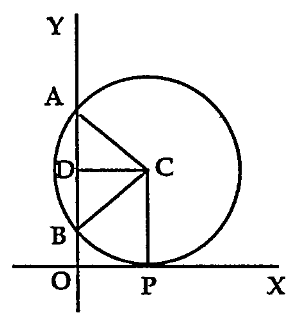
$\therefore$ $AD = BD = 3$

এখন, $BC^2 = CD^2 + BD^2$

$= OP^2 + BD^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

$\therefore$ অতএব, $CP = \pm 5$

$BC = \pm 5$



একটি বৃত্তের কেন্দ্র (4, 5) এবং ব্যাসার্ধ 5; আর একটি বৃত্তের কেন্দ্র (4, −5) এবং ব্যাসার্ধ 5

অতএব, বৃত্ত দুইটি

$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

বা, $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$

এবং $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 5^2$

বা, $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 16 = 0$ (উত্তর)

উদা. 8. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ $(x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36) - (x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43) = 0$

বা, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 - x^2 - y^2 + 5x - 8y + 43 = 0$

বা, $x - 2y + 7 = 0$ (উত্তর)

প্রশ্নমালা III B

1. দেখাও যে, $y = 2x + a\sqrt{5}$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

2. দেখাও যে, $y - 3x = 10$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তটিকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর : (−3, 1)

3. দেখাও যে, $4x + 3y - 3 = 0$ ও $12x + 5y - 13 = 0$ রেখা দুইটি (−2, −3) কেন্দ্র ও 4 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক।

4. প্রমাণ কর যে, $y = x + a\sqrt{2}$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর : $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

5. $x - y + 2 = 0$ রেখা $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$ বৃত্তে যে জ্যা তৈরি করে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। জ্যাটিকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $4\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 26 = 0$

6. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা

(i) x-অক্ষের সাথে $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে। উত্তর : $5y = 2x \pm a\sqrt{29}$

(ii) অক্ষ দুইটির সাথে a^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে। উত্তর : $x + y = \pm a\sqrt{2}$

(iii) $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের 2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[দি. বো. ২০১১; রা. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০২; মা. বো. ২০১০, ২০০৮] উত্তর : $x + 2y = 10$, $x - 2y = 10$

7. নিম্নের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :

(i) (1, 3) বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 = 9$ বৃত্তে। (ii) (1, −1) বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তে।

[চ. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০২; য. বো. ২০০২] উত্তর : (i) $\sqrt{\frac{11}{2}}$, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

8. $x^2 + y^2 = 16$ এবং $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ বৃত্ত দুইটির সরল সাধারণ স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $6x + 4y - 8 = \pm\sqrt{6}\,(x - 12)$

9. $x^2 + y^2 - 22x + 4y + 100 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 22x - 4y - 100 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ স্পর্শকগুলি নির্ণয় কর। উত্তর : $24x + 7y = 125$, $4x - 3y = 25$, $7x - 24y = 250$, $3x + 4y = 50$

10. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব. বো. ২০১১; চ. বো. ২০১০] উত্তর : $\sqrt{3}y = x \pm 8$

11. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০১; য. বো. ২০০৭ ; রা. বো. ২০০৪] উত্তর : $x + y + 4 = 0$, $x + y - 8 = 0$

12. (1, −3) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $2x - y - 4 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[দি. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৩] উত্তর : $5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 49 = 0$

13. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (4, 3) বিন্দুতে অবস্থিত এবং $5x - 12y + 3 = 0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে। উত্তর : $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$

14. প্রমাণ কর যে, $3x + 4y = 13$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক এবং এরূপ দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যেগুলি উল্লেখিত স্পর্শকের উপর লম্ব হবে। উত্তর : $4x - 3y + 6 = 0$, $4x - 3y - 14 = 0$

15. দেখাও যে, x-অক্ষ, $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 4 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর : $9y + 40x = 0$

16. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক, $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৭ ; কু. বো. ২০০৫, ২০০১ ; চ. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০১১, ২০০২] উত্তর : $4x + 3y - 25 = 0$, $4x + 3y + 5 = 0$

17. k-এর মান কত হলে $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে ? উত্তর : $k = 40, -10$

[ব. বো. ২০০৭, ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৬; য. বো. ২০০১]

18. দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়।

[রা. বো. ২০১১, ২০০৩; য. বো. ২০১১, ২০০৬ ;চ. বো. ২০১০, ২০০৮; ব. বো. ২০০৯, ২০০৫, ২০০৪ ; দি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০২; কু. বো. ২০০৮, ২০০৬, ২০০০; সি. বো. ২০০৪ ; মা. বো. ২০০৩]

19. $px + qy = a$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, (p, q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। [ব. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০৩ ; চ. বো. ২০০২]

20. $x^2+y^2-8x-10y=8$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক, $5x-12y-9=0$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৭ ; ব. বো. ২০০৬, ২০০২; মা. বো. ২০০৯, ২০০৬, ২০০৪]

উত্তর ঃ $5x-12y+131=0, 5x-12y=51$

21. $(3,-1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত বৃত্তটি x-অক্ষকে $(2,0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। মূল বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৫]

উত্তর ঃ $x^2+y^2-4x+2y+4=0, 4x+3y=0$

22. $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $x+y+1=0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যাদের কেন্দ্র x-অক্ষরেখার উপর অবস্থিত। [সি. বো. ২০১১] উত্তর ঃ $x^2+y^2-2x-1=0, x^2+y^2+6x+7=0$

23. (p,q) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ হবে $px+qy=0$. [য. বো. ২০০৭ ; কু. বো. ২০০৩]

উত্তরঃ $x^2+y^2-2px-2qy=0$

24. $(-4,3)$ ও $(8,-2)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটির এরূপ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত। উত্তরঃ $x^2+y^2-4x-y-38=0; y+4x=0$

25. $y=2x$ যদি $x^2+y^2=10x$ বৃত্তের কোনো জ্যা-এর সমীকরণ হয়, তবে উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১০; দি. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৩]

উত্তর ঃ $x^2+y^2-2x-4y=0$

26. $x^2+y^2-4x-6y+c=0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। c-এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০৪, ২০০৩; য. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৫, ২০০২; চ. বো. ২০০৮, ২০০৫, ২০০২; সি. বো. ২০০৭; রা. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৮, ২০০৫] উত্তর ঃ 4 ; $(2,0)$

27. দেখাও যে, $(0,1)$ ও (a,b) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্ত x-অক্ষকে এমন বিন্দুতে ছেদ করে যার ভুজ হবে $x^2-ax+b=0$ সমীকরণের দুইটি মূল।

28. $x^2+y^2-6x+8y+21=0$ বৃত্তের স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $y+6=0, y+2=0$.

29. $2x+3y-5=0$ রেখাটি $(3,4)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তটি y-অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০৪] উত্তর ঃ 4.

30. $(-5,4)$ বিন্দু থেকে $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০১] উত্তর ঃ $y-4=0, 3x+4y-1=0$

31. b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত যার কেন্দ্রের ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক, x-অক্ষ এবং $3y=4x$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $x^2+y^2-4bx-2by+4b^2=0$

32. মূলবিন্দু থেকে $x^2+y^2-10x+20=0$ বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০১১, ২০০৮; রা. বো. ২০১০, ২০০৮; সি. বো. ২০১০, ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৯, ২০০৬; ব. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০০] উত্তর ঃ $x-2y=0$; $x+2y=0$

33. দেখাও যে, $x-3y=5$ রেখাটি $x^2+y^2-6x+8y+15=0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। এই বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৭; মা. বো. ২০০৯, ২০০৩]

উত্তর ঃ $3x+y=5$

34. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং $3y+x=20$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যার একটি ব্যাসের সমীকরণ $y=3x$. উত্তর ঃ $x^2+y^2-2x-6y=0$

35. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(2,-5)$ এবং এটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুতে বৃত্তটির যে স্পর্শক আঁকা যায় তার সমীকরণ $2x-5y=0$. উত্তর ঃ $x^2+y^2-4x+10y=0$

36. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার কেন্দ্র $(1,2)$ এবং যা $2x+y=9$ রেখাকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, এই রেখাটি $4x^2+4y^2-4x-24y+17=0$ বৃত্তকেও স্পর্শ করে। উত্তর ঃ $x^2+y^2-2x-4y=0$

37. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(3, 7)$ এবং $(9, 1)$; দেখাও যে, এই বৃত্তটি $x - y + 4 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে। উত্তর ঃ $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 34 = 0$

38. 3 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের কেন্দ্র $y = x - 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং এটি $(7, 3)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, এরূপ দুইটি বৃত্ত পাওয়া যায় এবং এদের একটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

উত্তর ঃ $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$; $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 9$

39. $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তটির জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।
[রা. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৬, ২০০৩; ব. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০২; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৩; য. বো. ২০০৯, ২০০৩; সি. বো. ২০০৮, ২০০৫, ২০০৩; কু. বো. ২০০৬, ২০০১; চ. বো. ২০০৬, ২০০৪; মা. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০৬] উত্তর ঃ $3y = 2x + 13$

40. $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের একটি জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু, $(4, -6)$ বিন্দুতে অবস্থিত।
[সি. বো. ২০১১, ২০০২; দি. বো. ২০১১, ২০০৯; কু. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯, ২০০০; ঢা. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৫ ; মা. বো. ২০০৪] উত্তর ঃ $2x - 3y = 26$

41. $(3, 7)$ ও $(9, 1)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত আঁকা হয়েছে। দেখাও যে, $x + y = 4$ রেখাটি বৃত্তটির একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুটিও বের কর। [কু. বো. ২০০৯] উত্তর ঃ $(3, 1)$

42. কোনো বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক-এর একটি $(2, -4)$ এবং অপরটি মূল বিন্দু ; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং এই ব্যাসের সমান্তরাল স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উত্তরঃ $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0, 2x + y \pm 5 = 0$

43. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তস্থভাবে স্পর্শ করে। সাধারণ স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

[ব. বো. ২০১১] উত্তর ঃ $3x - 4y + 19 = 0$; $\left(-\frac{13}{5}, \frac{14}{5}\right)$

44. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $x - y + 3 = 0$; $2\sqrt{2}$

45. $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ স্পর্শকগুলি নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ $x = 1, y = 2, 4x - 3y = 10, 3x + 4y = 5$

46. নিচের বৃত্তগুলির সাধারণ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ঃ

(i) $x^2 + y^2 - 12x + 16y - 69 = 0$

$x^2 + y^2 - 9x + 12y - 59 = 0$

(ii) $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$

$(x-q)^2 + (y-p)^2 = r^2$ উত্তর ঃ (i) 10 (ii) $\sqrt{4r^2 - 2(p-q)^2}$

47. দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের যে কোনো বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c' = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\sqrt{c' - c}$.

48. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০১১; সি. বো. ২০০৫, ২০০১] উত্তর ঃ $x^2 + y^2 + x + 3y + \frac{1}{2} = 0$

চতুর্থ অধ্যায়

কনিক

CONICS

40. উপকেন্দ্র, দিকাক্ষ ও উৎকেন্দ্রিকতা (Focus, Directrix and Eccentricity)

সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে চলমান বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত ধ্রুবক হলে, তার সঞ্চারপথকে **কনিক** বলা হয়।

নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে কনিকের **উপকেন্দ্র** বা **ফোকাস** বলে।

নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে কনিকের **দিকাক্ষ** বা **নিয়ামক** রেখা বলা হয়।

ধ্রুব অনুপাতটিকে **উৎকেন্দ্রিকতা** বলা হয় এবং e দ্বারা সূচিত করা হয়।

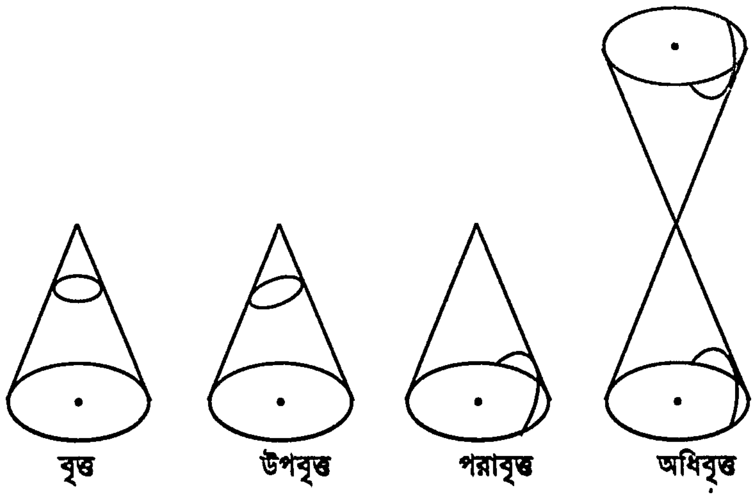
e-এর বিভিন্ন মানের জন্য সঞ্চারপথের আকৃতি বিভিন্ন হয়।

(i) $e = 1$ হলে সঞ্চারপথকে **পরাবৃত্ত** (parabola) বলা হয়। অতএব পরাবৃত্তস্থ প্রত্যেক বিন্দু উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষ থেকে সমান দূরে অবস্থিত।

(ii) $0 < e < 1$ হলে সঞ্চারপথকে **উপবৃত্ত** (ellipse) বলা হয়। সুতরাং, উপবৃত্তস্থ প্রত্যেক বিন্দু হতে উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষ একটি ধ্রুবক যার মান 1 এর চেয়ে কম।

(iii) $e > 1$ হলে সঞ্চারপথকে **অধিবৃত্ত** (hyperbola) বলা হয়। অধিবৃত্তস্থ প্রত্যেক বিন্দু হতে উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের দূরত্বের অনুপাত 1-এর চেয়ে বেশি।

মন্তব্য ঃ ব্যাকরণ অনুযায়ী দিক + অক্ষ = দিগাক্ষ হওয়াই উচিত ; বর্তমানে দিকাক্ষ লেখা নিপাতনে সিদ্ধ।



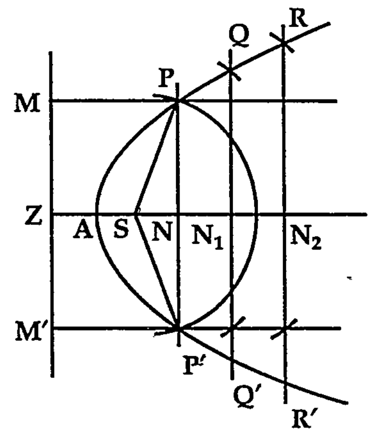
কোনো সমতল একটি সমবৃত্তভূমিক কোনকে (angle circular cone) ছেদ করলে বিভিন্ন অবস্থায় বিভিন্ন আকৃতির ছেদরেখা পাওয়া যায়। সমতলটি কোনের শীর্ষবিন্দু দিয়ে গেলে এক জোড়া সরলরেখা পাওয়া যাবে। আবার সমতলটি যদি কোনের শীর্ষবিন্দু দিয়ে না যায় এবং কোনের ভূমির সমান্তরাল অথবা এর অক্ষের সাথে লম্বভাবে কোনটিকে ছেদ করে, তবে ছেদরেখাটি বৃত্ত হবে।

এভাবে সমবৃত্তভূমিক কোনটি, সমতলটির দ্বারা বিভিন্ন অবস্থায় খণ্ডিত হয়ে বৃত্ত, পরাবৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত সৃষ্টি করে বলেই এই বক্ররেখাগুলির সাধারণ নাম কনিক। বিশেষ ক্ষেত্র হিসাবে এক জোড়া সরলরেখাও কনিকের অন্তর্ভুক্ত।

41. পরাবৃত্ত অঙ্কন

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে পরাবৃত্তের সংজ্ঞা দেয়া হয়েছে। উপকেন্দ্র এবং দিকাক্ষ থেকে সমান দূরে অবস্থিত বিন্দুগুলির সেটই পরাবৃত্ত। পরাবৃত্তের উপর যে কোনো সংখ্যক বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, S উপকেন্দ্র এবং L দিকাক্ষ। দিকাক্ষের উপর লম্ব SZ আঁকি যা দিকাক্ষকে Z বিন্দুতে ছেদ করেছে। মনে করি SZ রেখার মধ্যবিন্দু A. তাহলে SA = AZ. সংজ্ঞানুসারে, A পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। AS অথবা বর্ধিত AS-এর উপর যে কোনো বিন্দু N নিই এবং XS-এর উপর PNP′ লম্ব আঁকি। S-কে কেন্দ্র করে XN সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যেন তা PNP′-কে P ও P′ বিন্দুতে ছেদ করে।



এখন দিকাক্ষের উপর PM, P′M′ লম্ব টানি। তাহলে, SP = XN = PM. ∴ সংজ্ঞানুসারে, P পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। আবার, SP′ = XN = P′M′ ∴ P′ পরাবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। AS অথবা বর্ধিত AS-এর উপর N-এর বিভিন্ন অবস্থান নিয়ে পরাবৃত্তের উপর Q, Q′ ; R, R′ বিন্দু পাওয়া যায়। এই বিন্দুগুলি একটি সুষম বক্ররেখার সাহায্যে যোগ করলে একটি পরাবৃত্ত পাওয়া যাবে।

42. কতিপয় সংজ্ঞা

অক্ষরেখা ঃ উপকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে দিকাক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব রেখাটিকে পরাবৃত্তের অক্ষরেখা বা অক্ষ (axis) বলা হয়।

শীর্ষবিন্দু ঃ পরাবৃত্ত ও অক্ষরেখার ছেদবিন্দুকে পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (vertex) বলা হয়।

উপকেন্দ্রিক দূরত্ব ঃ উপকেন্দ্র থেকে পরাবৃত্তের যে কোনো বিন্দুর দূরত্বকে উপকেন্দ্রিক দূরত্ব বা ফোকাস দূরত্ব (focal distance) বলা হয়।

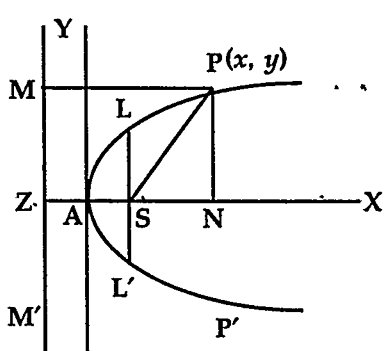
উপকেন্দ্রিক জ্যা ঃ পরাবৃত্তের যে জ্যা পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র দিয়ে গমন করে তাকে উপকেন্দ্রিক জ্যা (focal chord) বলে।

উপকেন্দ্রিক লম্ব ঃ উপকেন্দ্রিক জ্যা অক্ষের উপর লম্ব হলে তাকে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব বা নাভিলম্ব (latus rectum) বলে।

43. পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ (Standard Equation of Parabola) [সি. বো. ২০০৩]

মনে করি, S পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং MZM′ দিকাক্ষ। দিকাক্ষের উপর SZ লম্ব আঁকি এবং SZ-কে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। তাহলে SA = AZ ; সংজ্ঞানুসারে A শীর্ষবিন্দু এবং ASX পরাবৃত্তের অক্ষ। A-কে মূলবিন্দু এবং AX ও AY-কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরি। মনে করি, AS = a = ZA

মনে করি, পরাবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y)। S, P যোগ করি এবং দিকাক্ষের উপর PM ও AX-এর উপর PN লম্ব আঁকি।



সংজ্ঞানুসারে, SP = PM = ZN = $a + x$

$$\therefore \quad (a+x)^2 = SP^2 = SN^2 + PN^2$$
$$= (AN - AS)^2 + PN^2 = (x-a)^2 + y^2$$

অর্থাৎ, $y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2$

$$\therefore \; y^2 = 4ax$$

এই সম্পর্কটি পরাবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের জন্য সত্য; বিপরীতক্রমে P(x, y)-এর স্থানাঙ্ক $y^2 = 4ax$ শর্ত সিদ্ধ করলে $SP^2 = PM^2$ অর্থাৎ SP = PM হয়, অর্থাৎ P বিন্দুটি পরাবৃত্তের একটি বিন্দু। সুতরাং $y^2 = 4ax$ উক্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ। এটিকে পরাবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ বলে।

44. উপকেন্দ্রিক লম্ব

উপরের চিত্রে LSL′ পরাবৃত্তের অক্ষের লম্ব ; সুতরাং LSL′ পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্ব।

মনে করি, $SL = l$; পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ হলে L-এর স্থানাঙ্ক (a, l) এবং $l^2 = 4a^2$

$\therefore$ $l = 2a$ (সার্থখ্যিক মান)।

$\therefore$ $SL = 2a$ কিন্তু, $LL' = SL + SL' = 2SL = 4a$

$\therefore$ $LL' = 4a$; উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$.

অতএব, পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ হলে,

(i) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)

(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(a, 0)$

(iii) দিকাক্ষের সমীকরণ $x = -a$ বা, $x + a = 0$

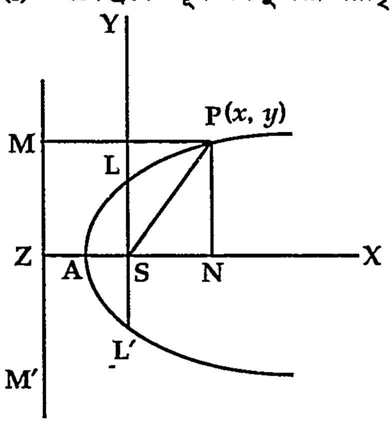
(iv) পরাবৃত্তের অক্ষরেখার সমীকরণ $y = 0$

(v) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$

(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = a$ বা, $x - a = 0$

45. বিশেষ ক্ষেত্র

(i) উপকেন্দ্রকে মূল বিন্দু ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ ঃ



পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S-কে মূলবিন্দু, এর অক্ষকে x-অক্ষ এবং উপকেন্দ্র S দিয়ে অক্ষরেখার উপর অঙ্কিত লম্ব SY-কে y-অক্ষ এবং $ZA = SA = a$ ধরি। পরাবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোনো বিন্দু হলে $SN = x$ এবং $PN = y$.

$\therefore$ $ZN = SN + ZS = x + 2a$

অতএব, $SN^2 + PN^2 = SP^2 = PM^2 = ZN^2 = (x + 2a)^2$

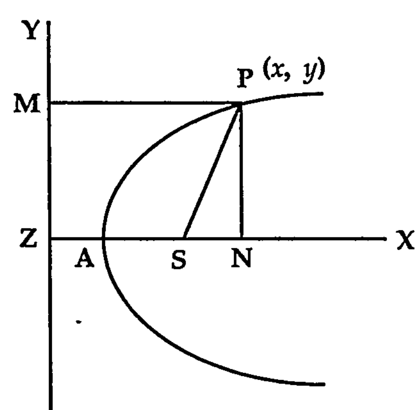
$\therefore$ $x^2 + y^2 = (x + 2a)^2$

অথবা, $y^2 = (x + 2a)^2 - x^2$

বা, $y^2 = 4a(x + a)$; এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

(ii) অক্ষরেখাকে x-অক্ষ এবং দিকাক্ষকে y-অক্ষ ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ ঃ

Z-কে মূল বিন্দু, ZX-কে x-অক্ষ এবং দিকাক্ষ ZM-কে y-অক্ষ ধরি। মনে করি, $AS = a = AZ$ এবং পরাবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y)। S, P যোগ করি এবং দিকাক্ষের উপর PM এবং ZX-এর উপর PN লম্ব আঁকি।



এখন, $ZN = x, PN = y, SN = ZN - ZS = x - 2a$

$SN^2 + PN^2 = SP^2 = PM^2 = ZN^2$

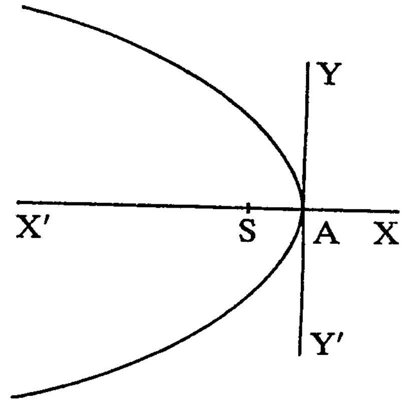
অর্থাৎ, $(x - 2a)^2 + y^2 = x^2$

অথবা, $y^2 = x^2 - (x - 2a)^2$

$\therefore$ $y^2 = 4a(x - a)$; এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

46. পরাবৃত্তের আকৃতি

(*a*) যদি উপকেন্দ্র দিকাক্ষের বামদিকে অবস্থিত হয়, তবে শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু এবং পরাবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ ধরলে পরাবৃত্তের সমীকরণ হবে $y^2 = -4ax$, $(a > 0)$.



এক্ষেত্রে উপকেন্দ্র S-এর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$। উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য হবে $4a$.

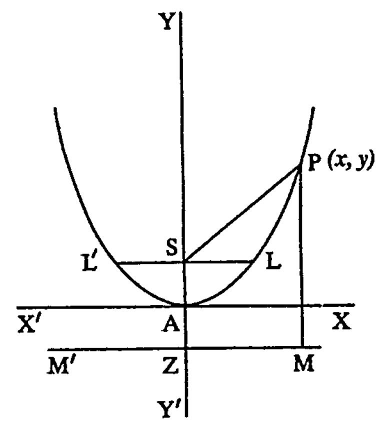
(*b*) পরাবৃত্ত, $x^2 = 4ay$, $(a > 0)$

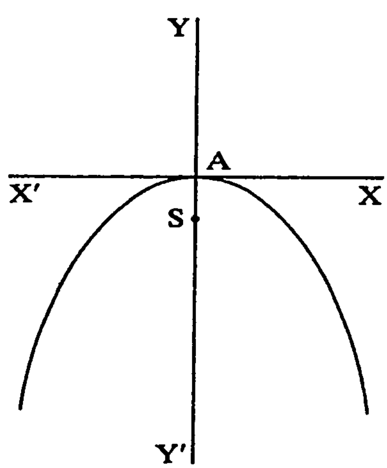
পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S এবং দিকাক্ষ MZM′। দিকাক্ষের উপর SZ লম্ব এঁকে, SZ-কে A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা হল।

তাহলে, AS = AZ ; A শীর্ষবিন্দু, এবং ASY পরাবৃত্তের অক্ষরেখা। A-কে মূলবিন্দু এবং AX ও AY-কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরা হল।

$AS = a = AZ$ এবং $P(x, y)$ পরাবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু। S, P যোগ করা হল এবং দিকাক্ষের উপর PM লম্ব আঁকা হল।

S-এর স্থানাঙ্ক $(0, a)$ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ, $y = -a$ বা, $y + a = 0$





এখন পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

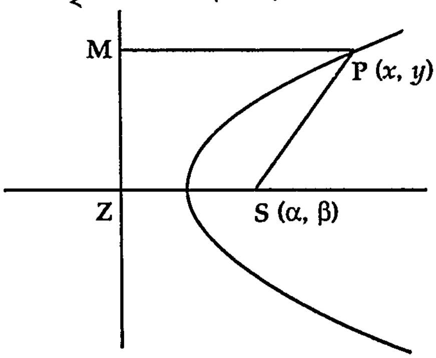
$SP = PM$ বা, $SP^2 = PM^2$ বা, $x^2 + (y - a)^2 = (y + a)^2$ বা, $x^2 = (y + a)^2 - (y - a)^2$

বা, $x^2 = 4ay$; পরাবৃত্তের অক্ষকে y-অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু ধরে এটিই পরাবৃত্তের সমীকরণ।

(*c*) যদি উপকেন্দ্র S, x-অক্ষের নিচের দিকে, y-অক্ষ পরাবৃত্তের অক্ষ এবং মূলবিন্দু পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহলে পরাবৃত্তের সমীকরণ হবে $x^2 = -4ay$; এক্ষেত্রে উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, -a)$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $4a$.

47. পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং দিকাক্ষের সমীকরণ দেয়া আছে; পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে ঃ



ধরা যাক, উপকেন্দ্র S-এর স্থানাঙ্ক (α, β) এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $lx + my + n = 0$

S, P যোগ করা হল এবং দিকাক্ষ MZ-এর উপর PM লম্ব আঁকা হল।

যেহেতু, $SP = PM$

অথবা, $SP^2 = PM^2$

$\therefore \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \left\{\dfrac{lx + my + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}\right\}^2$

সরলীকরণের পর পাই,

$m^2x^2 - 2lmxy + l^2y^2 - 2x\{(l^2 + m^2)\alpha + ln\} - 2y\{(l^2 + m^2)\beta + mn\} + (l^2 + m^2)\ (\alpha^2 + \beta^2) - n^2 = 0$

লক্ষণীয় যে, xy-এর দ্বিঘাত সম্বলিত পদগুলি একটি পূর্ণ বর্গ $(mx - ly)^2$ তৈরি করে। এটিই পরাবৃত্তের সমীকরণের বৈশিষ্ট্য।

অতএব, পরাবৃত্তের সাধারণ সমীকরণের আকৃতি

$(Ax + By)^2 + 2Gx + 2\ Fy + C = 0.$

48. পরাবৃত্তের লেখচিত্র

I. (*a*) প্রথমত মনে করি, পরাবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax\ (a > 0)$; সমীকরণ থেকে এটা স্পষ্ট যে, পরাবৃত্তটি মূল বিন্দু অর্থাৎ $(0, 0)$ দিয়ে যায়।

(*b*) x ঋণাত্মক হলে, y-এর মান অবাস্তব হয় ; কিন্তু x-এর যে কোনো ধনাত্মক মানের জন্য y-এর দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট মান অর্থাৎ $y = \pm 2\sqrt{ax}$ পাওয়া যায়। এটি থেকে প্রতীয়মান হয় যে x-অক্ষ অর্থাৎ পরাবৃত্তের নিজের অক্ষের সাপেক্ষে এটি প্রতিসম এবং পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে y-অক্ষের ডান অর্ধতলে অবস্থিত।

(*c*) x-এর মানের সাথে সাথে y-এর পরম মান বৃদ্ধি পায় এবং এই বৃদ্ধির কোনো শেষ নেই। ফলে পরাবৃত্ত তার অক্ষের উভয় পার্শ্বে অসীমে বিস্তৃত হয়।

(*d*) পরাবৃত্তের সমীকরণ যদি $y^2 = -4ax, (a > 0)$ হয়, তবে x-এর ধনাত্মক মানের জন্য y অবাস্তব হবে অর্থাৎ, পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে y-অক্ষের বাম অর্ধতলে অবস্থিত হবে।

II. (*a*) পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = 4by, (b > 0)$ হলে, এটা স্পষ্ট যে, পরাবৃত্তটি মূল বিন্দু অর্থাৎ $(0, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

(*b*) y ঋণাত্মক হলে, x-এর মান অবাস্তব হয় কিন্তু y-এর যে কোনো ধনাত্মক মানের জন্য x-এর দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট মান অর্থাৎ $x = \pm 2\sqrt{by}$ পাওয়া যায়। এ থেকে প্রতীয়মান হয় যে y-অক্ষ অর্থাৎ পরাবৃত্তের নিজ অক্ষের সাপেক্ষে এটি প্রতিসম এবং পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের উপরি অর্ধতলে অবস্থিত।

(*c*) y-এর মানের সাথে সাথে x-এর পরম মান বাড়ে। ফলে পরাবৃত্ত তার অক্ষের উভয় পার্শ্বে অসীম বিস্তৃত হয়।

(*d*) পরাবৃত্তের সমীকরণ যদি $x^2 = -4by, (b > 0)$ হয়, তবে y-এর ধনাত্মক মানের জন্য x অবাস্তব হবে, অর্থাৎ, পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের নিচের অর্ধতলে অবস্থিত হবে।

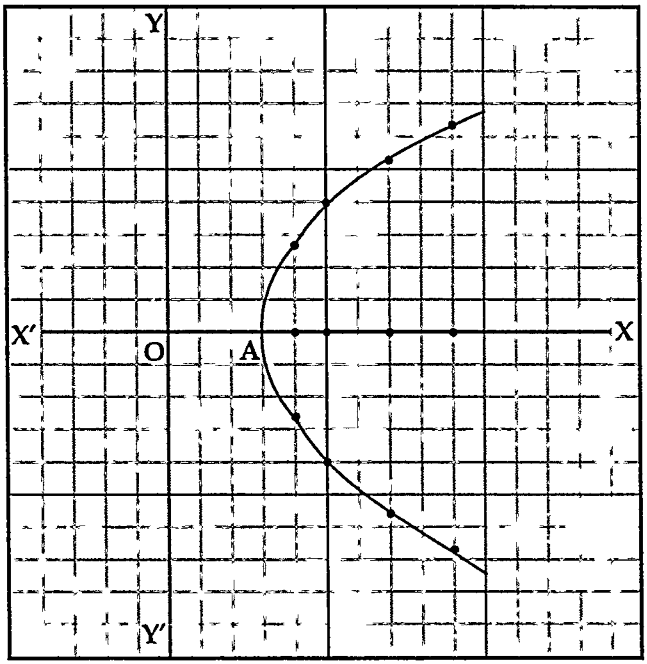
উদাহরণমালা

উদা. 1. লেখচিত্র অংকন কর ঃ $y^2 = 8(x-3)$

পরাবৃত্তটি $(3, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায়। $x < 3$ হলে, y-এর মান অবাস্তব হয় কিন্তু $x > 3$ হলে y-এর দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট মান পাওয়া যায়। এর থেকে প্রতীয়মান হয় যে x-অক্ষ অর্থাৎ পরাবৃত্তের নিজের অক্ষের সাপেক্ষে এটি

প্রতিসম এবং পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে $x = 3$ রেখার ডানদিকে xy-তলের প্রথম ও চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। 3 এবং 3 এর চেয়ে বৃহত্তর x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর সংশ্লিষ্ট মানগুলি নির্ণয় করি।

x	3	4	4	5	5	7	7	9	9
y	0	2·82	−2·82	4	−4	5·64	−5·64	6·9	−6·9



$y^2 = 8(x-3)$

দেখা যাচ্ছে, (3, 0) পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং পরাবৃত্তটি (4, 2·82), (4, −2·82), (5, 4), (5, −4), (7, 5·64), (7, − 5·64), (9, 6·9), (9, − 6·9) ..... প্রভৃতি বিন্দুগুলি দিয়ে যায়। ছক কাগজে X′OX এবং Y′OY রেখা দুইটিকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে, ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু সমান এক একক নিয়ে বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। এখন, বিন্দুগুলি একটি সুষম বক্ররেখার সাহায্যে যোগ করে $y^2 = 8(x-3)$ পরাবৃত্তের লেখ পাই।

উদা. 2. $3y^2 = 5x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

পরাবৃত্তের সমীকরণ $3y^2 = 5x$ অথবা, $y^2 = \frac{5}{3}x$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{5}{3}$

যেহেতু, শীর্ষবিন্দু থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব উপকেন্দ্রিক লম্বের এক চতুর্থাংশ,

সুতরাং, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5}{12}, 0\right)$

উদা. 3. $y^2 = 8px$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যখন পরাবৃত্তটি (4, − 8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

যেহেতু পরাবৃত্তটি (4, − 8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$(-8)^2 = 8p.\ 4$. অর্থাৎ, $p = 2$

অতএব, পরাবৃত্তের সমীকরণ দাঁড়ায়, $y^2 = 16x$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 16.

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{16}{4}, 0\right)$ অর্থাৎ, (4, 0).

উদা. 4. $y^2 = 8x - 8y$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উপকেন্দ্র এবং তার অক্ষ ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।** **[দি. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০০]**

প্রদত্ত সমীকরণটিকে $y^2 + 8y = 8x$ রূপে লেখা যায়।

বা, $y^2 + 8y + 16 = 8x + 16$

বা, $(y+4)^2 = 8(x+2)$ ... ... (1)

$x + 2 = X$ এবং $y + 4 = Y$ লিখলে (1) সমীকরণটি দাঁড়ায় $Y^2 = 8X$.

$y^2 = 4ax$-এর সাথে $Y^2 = 8X$-এর তুলনা করে পাই,

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $X = 0, Y = 0$ বা, $x = -2, y = -4$ অর্থাৎ, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, -4)$। উপকেন্দ্রিক লম্ব = 8।

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $X = 2$ এবং $Y = 0$ বা, $x = 0$ এবং $y = -4$

$\therefore$ উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, -4)$

পরাবৃত্তের অক্ষ, $Y = 0$ বা, $y + 4 = 0$

দিকাক্ষের সমীকরণ $X = -2$ বা, $x + 2 = -2$ বা, $x + 4 = 0$

উদা. 5. $3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$ **পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং অক্ষ ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।** **[য. বো. ২০০১]**

$3x^2 - 4y + 6x - 5 = 0$

বা, $3(x^2 + 2x + 1) - 4y - 8 = 0$

বা, $3(x+1)^2 = 4(y+2)$

বা, $(x+1)^2 = \frac{4}{3}(y+2)$ ... ... (1)

$x + 1 = X$ এবং $y + 2 = Y$ ধরে (1) সমীকরণটি দাঁড়ায়, $X^2 = \frac{4}{3}Y$

এটিকে $x^2 = 4ay$-এর সাথে তুলনা করে পাই, শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $X = 0, Y = 0$ অর্থাৎ, $x = -1, y = -2$.

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, -2)$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{4}{3}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $X = 0, Y = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

অর্থাৎ, $x + 1 = 0, y + 2 = \frac{1}{3}$ অর্থাৎ, $x = -1, y = -\frac{5}{3}$, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(-1, -\frac{5}{3}\right)$

পরাবৃত্তের অক্ষরেখার সমীকরণ $X = 0$ অর্থাৎ, $x + 1 = 0$

দিকাক্ষের সমীকরণ $Y = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$ অর্থাৎ, $y + 2 = -\frac{1}{3}$ বা, $3y + 7 = 0$

উদা. 6. $x^2 + 4x + 2y = 0$ **পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং অক্ষরেখা, দিকাক্ষ ও উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।** **[ব. বো. ২০০৪]**

পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2 + 4x + 2y = 0$ বা, $(x+2)^2 = -2(y-2)$

$x + 2 = X$ এবং $y - 2 = Y$ ধরে সমীকরণটি দাঁড়ায়, $X^2 = -2Y$.

সমীকরণটিকে $x^2 = -4ay$-এর সাথে তুলনা করে পাই,

(i) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $X = 0, Y = 0$ অর্থাৎ, $x + 2 = 0, y - 2 = 0$

অর্থাৎ $x = -2, y = 2$ $\therefore$ শীর্ষবিন্দু $(-2, 2)$

(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $X = 0$, $Y = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

অর্থাৎ, $x + 2 = 0$ ও $y - 2 = -\frac{1}{2}$

বা, $x = -2, y = \frac{3}{2}$ $\therefore$ উপকেন্দ্র $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

(iii) পরাবৃত্তের অক্ষরেখার সমীকরণ, $X=0$ বা, $x+2=0$

(iv) পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $Y=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

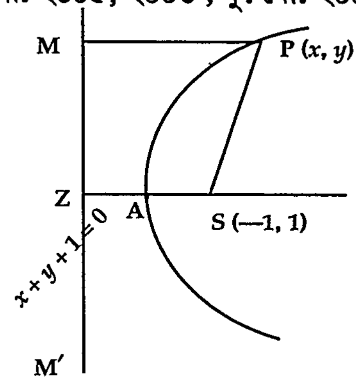
বা, $y-2=\frac{1}{2}$ বা, $2y-5=0$

(v) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $Y=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

বা, $y-2=-\frac{1}{2}$ বা, $2y-3=0$

উদা. 7. $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র এবং $x+y+1=0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২০১০; দি. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০৩ ; কু. বো. ২০০৩]



পরাবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোনো বিন্দু ও $(-1, 1)$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং MZM′ এর দিকাক্ষ। দিকাক্ষের সমীকরণ $x+y+1=0$

সংজ্ঞানুসারে $SP=PM$ বা, $SP^2=PM^2$

বা, $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{(x+y+1)^2}{2}$

বা, $2\{(x+1)^2+(y-1)^2\}=(x+y+1)^2$

বা, $(x-y)^2+2x-6y+3=0$, এটিই পরাবৃত্তের সমীকরণ।

উপকেন্দ্র $(-1, 1)$ দিয়ে অতিক্রমকারী $x+y+1=0$ দিকাক্ষের উপর লম্ব রেখাটিই অক্ষরেখা।

$x+y+1=0$ রেখার উপর লম্ব যে কোনো রেখার সমীকরণ $x-y+k=0$ ... ... (1)

যেহেতু (1), সরলরেখাটি $(-1, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় $\therefore -1-1+k=0$ অর্থাৎ, $k=2$

সুতরাং, অক্ষরেখার সমীকরণ $x-y+2=0$

উপকেন্দ্র দিয়ে অতিক্রান্ত দিকাক্ষের সমান্তরাল রেখাটিই উপকেন্দ্রিক লম্ব। দিকাক্ষের সমান্তরাল যে কোনো রেখার সমীকরণ $x+y+k'=0$ ... ... (2)

যদি (2) উপকেন্দ্র $S(-1, 1)$ দিয়ে অতিক্রম করে, তবে $-1+1+k'=0$ বা, $k'=0$

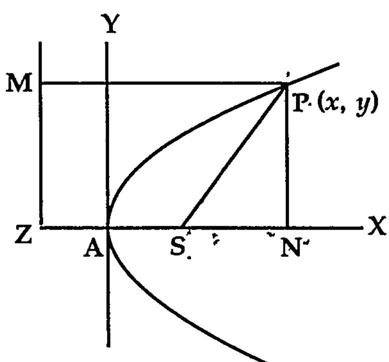
অতএব, উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x+y=0$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 2.SZ$

$SZ=$ দিকাক্ষ থেকে $S(-1, 1)$ উপকেন্দ্রের লম্ব দূরত্ব $=\frac{-1+1+1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=2.\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

উদা. 8. $y^2=8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[রা. বো. ২০১১, ২০০৯; চ. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০১; য. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০, ২০০৮; সি. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০৬]**



সমীকরণটি $y^2=4ax$-এর সাথে তুলনা করে পাই $a=2$

মনে করি নির্ণেয় বিন্দুটি $P(x, y)$.

উপকেন্দ্রিক দূরত্ব, $SP=PM=ZN$

$=AZ+AN=AS+AN$

$=a+x=2+x$

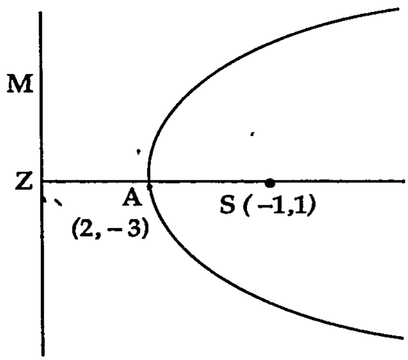
প্রশ্নানুসারে, $2+x=8$ $\therefore x=6$

পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2=8x$ থেকে, $y^2=48$

$\therefore y=\pm 4\sqrt{3}$

নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(6, \pm 4\sqrt{3})$

উদা. 9. $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র এবং $(2, -3)$ শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট পরাবৃত্তটির অক্ষ ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৩]



পরাবৃত্তটির অক্ষ ZS এবং দিকাক্ষ MZ.

এর উপকেন্দ্র S এবং শীর্ষবিন্দু A.

S-এর স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$ এবং শীর্ষবিন্দু A-এর স্থানাঙ্ক $(2, -3)$.

যেহেতু A, ZS-এর মধ্যবিন্দু

অতএব, Z-এর স্থানাঙ্ক (h, k) হলে,

$\therefore\ 2 = \frac{h-1}{2}$, বা, $h-1=4$, $\therefore\ h=5$

এবং $-3 = \frac{k+1}{2}$, বা, $k+1=-6$, বা, $k=-7$

অতএব, Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(5, -7)$

অক্ষ ZS-এর ঢাল, $\frac{-3-1}{2+1} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$

অতএব, ZS-এর সমীকরণ $y-1 = -\frac{4}{3}(x+1)$

বা, $3y-3 = -4x-4$

বা, $4x+3y+1=0$

দিকাক্ষ অক্ষের লম্ব, অতএব দিকাক্ষের সমীকরণ $3x-4y+k=0$, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

দিকাক্ষ $(5, -7)$ বিন্দু দিয়ে যায়,

$\therefore\ 3.5 - 4.(-7) + k = 0$

বা, $15+28+k=0$,

$\therefore\ k=-43$

দিকাক্ষের সমীকরণ $3x-4y-43=0$

প্রশ্নমালা IV A

1. নিচের প্রতিটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও শীর্ষের স্থানাঙ্ক এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ঃ

(i) $y^2 = 6x$, (ii) $x^2 = 6y$, (iii) $y^2 = -8x$, (iv) $x^2 = -8y$

উত্তর ঃ						
(i)	উপকেন্দ্র	$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$	শীর্ষবিন্দু	$(0, 0)$	উপকেন্দ্রিক লম্ব	6
(ii)	"	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	"	$(0, 0)$	"	6
(iii)	"	$(-2, 0)$	"	$(0, 0)$	"	8
(iv)	"	$(0, -2)$	"	$(0, 0)$	"	8

2. নিচের প্রতিটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর ঃ

(i) $(y-1)^2 = 4(x-2)$ [দি. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০২; মা. বো. ২০০৭], (ii) $(y-2)^2 = 8(x-4)$,

(iii) $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$ [য. বো. ২০০৯; চ.বো. ২০০৩]

(iv) $y^2 = 4y + 4x - 16$ [য. বো. ২০০৫], (v) $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$ [ঢা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০১০]

(vi) $x^2 + 2y - 8x + 7 = 0$ [সি. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো ২০০৩; মা. বো. ২০০৩]

(vii) $y^2 = 4y + 4x - 8$ [ব. বো. ২০১১; রা. বো. ২০১০; য. বো. ২০০৭ ; কু. বো. ২০০১, চ. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০৫]

(viii) $(x-4)^2 = -4(y-5)$, (ix) $5x^2+15x-10y-4=0$ [কু. বো. ২০১১, ২০০৪, ২০০২; সি. বো. ২০০৯, ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৮; রা. বো. ২০০৭ ; মা. বো. ২০০২]

উত্তর ঃ

(i)	শীর্ষবিন্দু	(2, 1)	উপকেন্দ্র	(3, 1)	উপকেন্দ্রিক লম্ব	4	অক্ষ	$y=1$	দিকাক্ষ	$x=1$
(ii)	„	(4, 2)	„	(6, 2)	„	8	„	$y=2$	„	$x=2$
(iii)	„	(−3, 2)	„	$\left(-\frac{13}{6}, 2\right)$	„	$\frac{10}{3}$	„	$y=2$	„	$x=-\frac{23}{6}$
(iv)	„	(3, 2)	„	(4, 2)	„	4	„	$y=2$	„	$x=2$
(v)	„	(3, 1)	„	(1, 1)	„	8	„	$y=1$	„	$x=5$
(vi)	„	(4, 9/2)	„	(4, 4)	„	2	„	$x=4$	„	$y=5$
(vii)	„	(1, 2)	„	(2, 2)	„	4	„	$y=2$	„	$x=0$
(viii)	„	(4, 5)	„	(4, 4)	„	4	„	$x=4$	„	$y=6$
(ix)	„	$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{61}{40}\right)$	„	$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{41}{40}\right)$	„	2	„	$x+\frac{3}{2}=0$	„	$y+\frac{81}{40}=0$

3. $y^2 = 8x+5$ পরাবৃত্তের শীর্ষ ও উপকেন্দ্রিক লম্ব নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৪] উত্তর ঃ $\left(-\frac{5}{8}, 0\right)$; 8

4. $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি (3, −2) বিন্দু দিয়ে গমন করলে এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১০, ২০০৫; দি. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৭, ২০০১; রা. বো. ২০০৬, ২০০০ ; য. বো. ২০০২; কু. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৯, ২০০৬] উত্তর ঃ $\frac{4}{3}, \left(\frac{1}{3}, 0\right)$

5. $y^2 = 2(x+3)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব. বো. ২০০৩] উত্তর ঃ (−3, 0). $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$, $2x+7=0$

6. $5x^2+30x+2y+59=0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১১, ২০০৩; সি. বো. ২০১১, ২০০২; ঢা. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০১; চ. বো. ২০০৯, ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৮; মা. বো. ২০০৪]

উত্তর ঃ (−3, −7) ; $\left(-3, -\frac{71}{10}\right)$; $\frac{2}{5}$; $x+3=0$; $10y+69=0$

7. $x^2 = 4(1-y)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২০১১; চ. বো. ২০১১; ব. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৮, ২০০৪]

উত্তর ঃ শীর্ষবিন্দু (0, 1), উপকেন্দ্র (0, 0), দিকাক্ষ $y=2$.

8. একটি পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র এবং শীর্ষ যথাক্রমে (0, 0) এবং (−2, −1) বিন্দুতে। পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১১; চ. বো. ২০১০; য. বো. ২০০৮; মা. বো. ২০০২]

উত্তর ঃ $2x+y+10=0$, $(x-2y)^2-40x-20y-100=0$

9. লেখচিত্র অংকন কর ঃ

(i) $y^2=4x$, (ii) $y^2=-16x$, (iii) $x^2=10y$, (iv) $y=-x^2$

(v) $y=(x-1)^2$, (vi) $y=x^2-2x$ (vii) $x^2-6x-4y+5=0$

(viii) $2x^2-8x-y+11=0$, (ix) $4(y-5)=-(x-4)^2$

(x) $y^2=4y+4x-8$, (xi) $x^2+2y-8x+7=0$, (xii) $(y-2)^2=5(x-1)$

10. $y^2=12x$ পরাবৃত্তের কোন্ বিন্দুতে কোটি ভুজের দ্বিগুণ হবে ? উত্তর ঃ (3, 6)

11. (i) একটি পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রকে মূলবিন্দু এবং $2x + y - 1 = 0$ রেখাকে দিকাক্ষ ধরে পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর ; পরাবৃত্তের অক্ষের সমীকরণও বের কর। উত্তর ঃ $(x - 2y)^2 + 4x + 2y - 1 = 0$; $x - 2y = 0$

(ii) $(-8, -2)$ উপকেন্দ্র এবং $2x - y - 9 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০১০, ২০০০; রা. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০১; ব. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৭, ২০০০; য. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৪, ২০০১; মা. বো. ২০১১] উত্তর ঃ $(x + 2y)^2 + 116x + 2y + 259 = 0$

(iii) $(1, 1)$ উপকেন্দ্র ও $3x + 4y = 1$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। তার অক্ষেরও সমীকরণ বের কর। [ব. বো. ২০১১, ২০০৫, ২০০৪, ২০০১; য. বো. ২০১০, ২০০২; সি. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৭, ২০০১; রা. বো. ২০০৫, ২০০০ ; চ. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৫, ২০০২ ; মা. বো. ২০০৬, ২০০৪]
উত্তর ঃ $(4x - 3y)^2 - 44x - 42y + 49 = 0$; $3y - 4x + 1 = 0$

12. পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার (i) উপকেন্দ্র $(2, 0)$ এবং দিকাক্ষ $x + 2 = 0$
[কু. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০০৫]

(ii) উপকেন্দ্র $(0, -4)$ এবং দিকাক্ষ $y - 4 = 0$ [ব. বো. ২০০৭] উত্তর ঃ (i) $y^2 = 8x$, (ii) $x^2 + 16y = 0$

13. $(3, 4)$ উপকেন্দ্র ও $(0, 0)$ শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০২; দি. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৮, ২০০২; ব. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০৪] উত্তর ঃ $3x + 4y + 25 = 0$

14. (i) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(0, a)$ এবং দিকাক্ষ $y + a = 0$ উত্তর ঃ $x^2 = 4ay$

(ii) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার শীর্ষ $(2, 3)$ বিন্দু এবং দিকাক্ষ $y = 6$; এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৯, ২০০৩] উত্তর ঃ $x^2 - 4x + 12y - 32 = 0$; 12.

15. $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।
[কু. বো. ২০১০; দি. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৫; রা. বো. ২০০৭ ; সি. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০৩] উত্তর ঃ $(2, \pm 4\sqrt{2})$

16. $y^2 = 9x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুর কোটি 12 হলে ঐ বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $18\frac{1}{4}$

17. এরূপ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(2, 5)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x = 4$ রেখাটি এর শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে। উত্তর ঃ $y^2 - 10y + 8x - 7 = 0$

18. $x - y + 2 = 0$ সরলরেখাটি কোনো পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে তার অক্ষের উপর লম্ব এবং উপকেন্দ্র $(1, -1)$ বিন্দুতে অবস্থিত। পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $(x + y)^2 - 16x + 16y - 32 = 0$

19. এরূপ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ $(3, 1)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং যার দিকাক্ষের সমীকরণ $4x + 3y - 5 = 0$. [রা. বো. ২০০২; মা. বো. ২০০৩] উত্তর ঃ $(3x - 4y)^2 - 190x - 80y + 625 = 0$

20. একটি পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $x - c = 0$ এবং তার শীর্ষ $(c', 0)$ বিন্দুতে অবস্থিত। দেখাও যে পরাবৃত্তটির সমীকরণ $y^2 = 4(c' - c)(x - c')$।

21. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার অক্ষরেখা x-অক্ষের সমান্তরাল এবং শীর্ষবিন্দু y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যা $(0, 2)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। উত্তর ঃ $y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$

22. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু $(0, 2)$, অক্ষরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(2, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। উত্তর ঃ $3x^2 = 4(y - 2)$

23. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ $(4, -3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং দিকাক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল এবং যা $(-4, -7)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [সি. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $x^2 - 8x + 16y + 64 = 0$

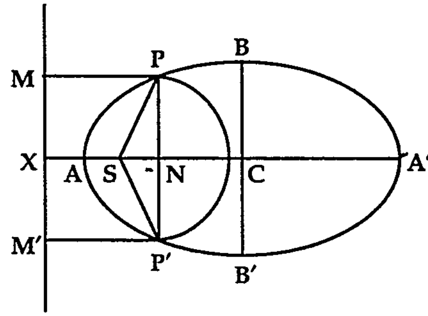
24. $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(0, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। a, b, c-এর মান নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৯, ২০০৭, ২০০১ ; চ. বো. ২০০৯; দি. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $a = \frac{1}{2}, b = 2, c = 5$

25. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু $(4, -3)$ বিন্দুতে অবস্থিত, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 এবং অক্ষটি x-অক্ষের সমান্তরাল। [কু. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৪, ২০০৩] উত্তর ঃ $(y + 3)^2 = 4(x - 4)$

26. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(-1, 3)$ এবং শীর্ষ $(4, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত।
[কু. বো. ২০১১; সি. বো. ২০০৬; মাদ্রাসা বো. ২০০৮] উত্তর ঃ $(y + 3)^2 = -20(x - 4)$.

49. উপবৃত্ত অঙ্কন

মনে করি, S উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, MXM′ দিকাক্ষ এবং e $(0 < e < 1)$ এর উৎকেন্দ্রিকতা। উপবৃত্তের যে কোনো সংখ্যক বিন্দুর অবস্থান নির্ধারণ করতে হবে। দিকাক্ষের উপর SX লম্ব টানি এবং XS-কে বর্ধিত করি। SX-কে e ঃ 1 অনুপাতে A ও A′ বিন্দুতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করি যেন $\frac{SA}{AX} = e$ এবং $\frac{SA'}{A'X} = e$ হয়। সুতরাং, সংজ্ঞানুসারে, A ও A′ উপবৃত্তের দুইটি বিন্দু। AA′-এর উপর যে কোনো বিন্দু N নিই এবং AA′-এর উপর PNP′ লম্ব টানি। S-কে কেন্দ্র করে এবং e. NX সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি যেন তা PNP′-কে P ও P′ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে P ও P′ উপবৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু।

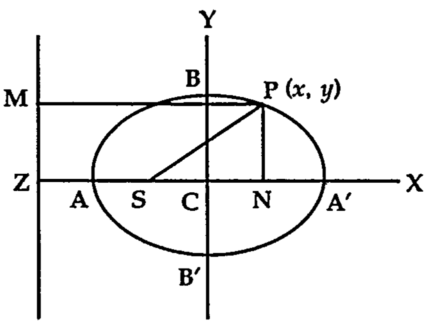


SP ও SP′ যোগ করি এবং দিকাক্ষের উপর PM ও P′M′ লম্ব আঁকি।

এখন, $SP = e. XN = e. PM$ অর্থাৎ, $\frac{SP}{PM} = e$ $\therefore$ P উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। অনুরূপভাবে, P′ উপবৃত্তের উপর আর একটি বিন্দু। N-এর মত AA′ -এর উপর যে কোনো বিন্দু নিলে উপবৃত্তের উপর অন্যান্য বিন্দু পাওয়া যাবে।

A, A′ বিন্দু দুইটি শীর্ষবিন্দু, AA′ বৃহৎ অক্ষ, AA′-এর মধ্যবিন্দু C উপবৃত্তের কেন্দ্র নামে অভিহিত। কেন্দ্র দিয়ে অঙ্কিত বৃহৎ অক্ষের উপর BB′ লম্ব জ্যাটিকে উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষ বলে। AA′ ও BB′ অক্ষ দুইটিকে উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ বলে। B, B′ বিন্দু দুইটিকেও উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু বলে।

50. উপবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ (Standard equation of ellipse)



মনে করি, উপবৃত্তের S উপকেন্দ্র, MZ দিকাক্ষ এবং e উৎকেন্দ্রিকতা।

দিকাক্ষের উপর SZ লম্ব আঁকি। SZ-কে e ঃ 1 অনুপাতে যথাক্রমে A ও A′ বিন্দু অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করি যেন $SA = e.\ AZ$ এবং $SA' = e.\ A'Z$। তাহলে A ও A′ উপবৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু।

মনে করি, AA′-এর মধ্যবিন্দু C এবং $AA' = 2a$ তাহলে, $CA = CA' = a$ এখন $SA = e.AZ$,

বা, $a - CS = e\,(CZ - a)$ ... ... (1)

এবং $SA' = e.\ A'Z$ বা, $a + CS = e\,(CZ + a)$ ... ... (2)

(1) ও (2) যোগ করে পাই, $2a = 2e.\ CZ$ বা, $CZ = \frac{a}{e}$

(2) থেকে (1) বিয়োগ করে পাই, $2.\ CS = 2e.\ a$ বা, $CS = ae.$

C-কে মূল বিন্দু, CX ও CY-কে যথক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরি। উপবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু P নিই যার স্থানাঙ্ক (x, y)। AA′-এর উপর PN ও দিকাক্ষের উপর PM লম্ব আঁকি।

সুতরাং সংজ্ঞানুসারে, $SP = e.\ PM = e.\ NZ$

$\therefore \quad SP^2 = e^2.\ NZ^2$

বা, $SN^2 + PN^2 = e^2\,(CZ + CN)^2$

কিন্তু, $SN = CS + CN = ae + x, PN = y$

$\therefore \quad (ae + x)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} + x\right)^2$

বা, $x^2\,(1 - e^2) + y^2 = a^2\,(1 - e^2)$

বা, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2\,(1 - e^2)} = 1$ ... ... (i)

(i)-এ $x = 0$ ধরলে আমরা পাই, $y = \pm a\sqrt{1-e^2}$; দেখা যাচ্ছে যে, y-অক্ষ উপবৃত্তকে দুইটি বাস্তব বিন্দু (যেহেতু $e < 1$) B, B′-এ ছেদ করে। বিন্দু দুইটি C-এর বিপরীত দিকে এমনভাবে অবস্থিত যে,

$CB = CB' = a\sqrt{1-e^2}.$

মনে করি $CB = CB' = b$ তাহলে, $b^2 = a^2(1-e^2)$ ... ... (ii)

সুতরাং (i) সমীকরণটি দাঁড়ায়, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (iii)

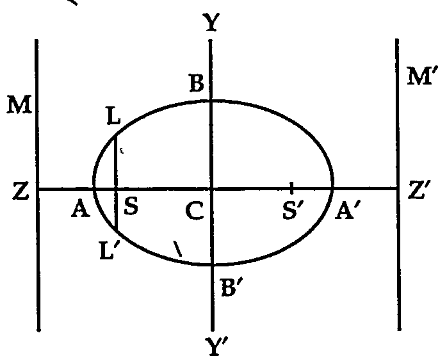
এটিই উপবৃত্তের মান সমীকরণ।

অনুসি ঃ (ii)-কে এভাবে লেখা চলে $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$ বা, $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা a, b-এর মাধ্যমে প্রকাশিত হয়েছে।

51. উপবৃত্তের উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষ

উপবৃত্তের একটি দ্বিতীয় উপকেন্দ্র ও দ্বিতীয় দিকাক্ষ আছে। যেহেতু, উপবৃত্তটি y-অক্ষ বরাবর প্রতিসম যদি তাকে BB′ বরাবর ভাঁজ করা হয় তাহলে উপবৃত্তের ডান ও বাম পক্ষ দুইটি পরস্পরের সাথে সমাপতিত হয়। এখন x-অক্ষের উপর S′ এবং Z′ দুইটি বিন্দু এমনভাবে নেয়া হয়, যেন $CS' = CS = ae$ এবং $CZ' = CZ = \frac{a}{e}$ হয়। ZZ′-উপর M′Z′ লম্ব আঁকা হলো। তাহলে প্রতিসাম্য অনুসারে, এটি স্পষ্ট যে, S′-কে উপকেন্দ্র এবং M′Z′-কে দিকাক্ষ ধরে আমরা একই উপবৃত্ত পাই। অতএব, উপবৃত্তের দুইটি উপকেন্দ্র এবং দুইটি দিকাক্ষ আছে।



52. উপকেন্দ্রিক লম্ব

উপবৃত্তের যে কোনো উপকেন্দ্রের মধ্য দিয়ে অঙ্কিত বৃহৎ অক্ষের উপর লম্ব রেখার উপবৃত্তের অন্তর্গত অংশই উপকেন্দ্রিক লম্ব। যদি LSL′ উপকেন্দ্রিক লম্ব হয়, তবে SL = SL′ এবং L-এর স্থানাঙ্ক $(-ae, SL)$ এবং বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore \quad \frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{SL^2}{b^2} = 1$ বা, $SL^2 = b^2(1-e^2)$

কিন্তু $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$

$\therefore \quad SL^2 = \frac{b^4}{a^2}$ অর্থাৎ, $SL = \frac{b^2}{a}$

$\therefore \quad LL' = \frac{2b^2}{a}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত সম্পর্কে নিম্নলিখিত ফলগুলি স্মরণ রাখতে হবে।

(i) উপবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0 , 0)

(ii) বৃহৎ অক্ষ = $2a$

(iii) ক্ষুদ্র অক্ষ = $2b$

(iv) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

(v) বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ $y = 0$

(vi) ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ $x = 0$

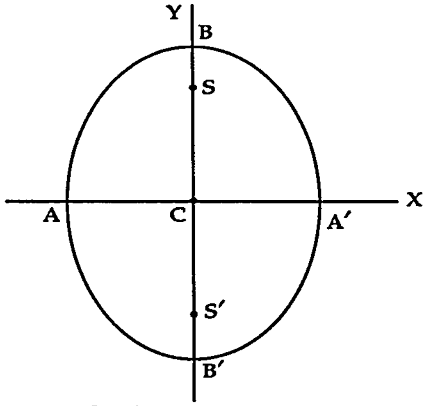
(vii) দিকাক্ষের সমীকরণ $x = \pm \frac{a}{e}$

(viii) উৎকেন্দ্রিকতা $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

(ix) উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \frac{2b^2}{a}$

53. বিশেষ অবস্থা

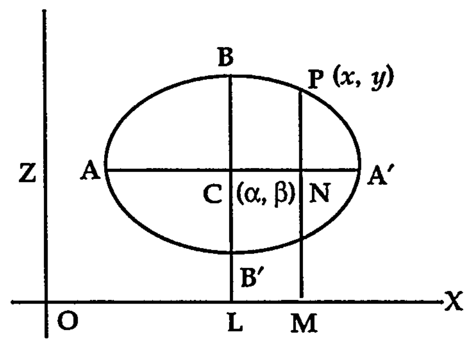
(i) যদি উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং $a<b$ হয়, তাহলে তার বৃহৎ অক্ষ y-অক্ষের উপর এবং ক্ষুদ্র অক্ষ x-অক্ষের উপর অবস্থিত হবে। উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm be)$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব ও তার সমীকরণ যথাক্রমে $\frac{2a^2}{b}$ এবং $y=\pm be$; দিকাক্ষের সমীকরণ $y=\pm\frac{b}{e}$



(ii) উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (α, β) এবং অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষের সমান্তরাল।

মনে করি, উপবৃত্তের কেন্দ্র $C(\alpha, \beta)$, বৃহৎ অক্ষ AA′, x-অক্ষরেখার সমান্তরাল এবং ক্ষুদ্র অক্ষ BB′, y-অক্ষরেখার সমান্তরাল। ধরা যাক $AA'=2a$, $BB'=2b$। উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোনো বিন্দু নিই। x-অক্ষের উপর PNM লম্ব আঁকি যা বৃহৎ অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করে।

উপবৃত্তের কেন্দ্র C-কে মূলবিন্দু ধরে, C-এর সাপেক্ষে P-এর স্থানাঙ্ক (CN, PN)।



যেহেতু P বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর অবস্থিত

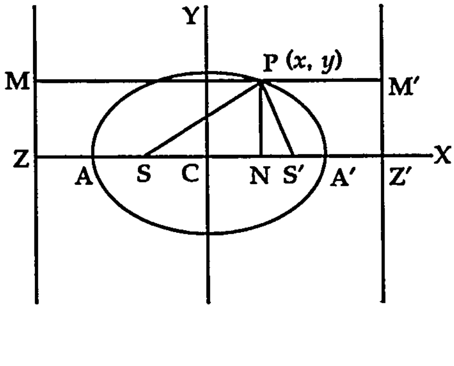
অতএব, $\frac{CN^2}{a^2}+\frac{PN^2}{b^2}=1$, কিন্তু $CN=x-\alpha$ এবং $PN=y-\beta$

$\therefore \frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$, এই সম্পর্ক উপবৃত্তের উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের জন্য সত্য। বিপরীতক্রমে $P(x, y)$ এর স্থানাঙ্ক ঐ সমীকরণ সিদ্ধ করলে P বিন্দুটি উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

সুতরাং, এটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

54. উপবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব দুইটির যোগফল বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান

মনে করি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের সমীকরণ এবং উপবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দু $P(x_1, y_1)$। S ও S′ উপবৃত্তের দুইটি উপকেন্দ্র এবং MZ, M′Z′ তার দুইটি দিকাক্ষ। SP ও S′P যোগ করি এবং দিকাক্ষ দুইটির উপর MPM′ লম্ব আঁকি।



এখন, $SP = e.PM = e.NZ$
$= e(CZ+CN)$
$= e\left(\frac{a}{e}+x_1\right)=a+ex_1$

$S'P = e.PM' = e.NZ' = e(CZ'-CN)$
$= e\left(\frac{a}{e}-x_1\right)=a-ex_1$

$\therefore SP+S'P = a+ex_1+a-ex_1=2a$

55. উপবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

উপকেন্দ্র $S(\alpha, \beta)$, দিকাক্ষ $ax + by + c = 0$ এবং $e\ (< 1)$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি, উপবৃত্তের উপরিস্থিত $P(x, y)$ যে কোনো বিন্দু। SP যোগ করি এবং দিকাক্ষের উপর PM লম্ব আঁকি।

$\therefore\quad SP = e.PM$ বা, $SP^2 = e^2.PM^2$

বা, $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2\dfrac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$

56. উপবৃত্তের লেখচিত্র

উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$-কে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়,

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

বা, $y = \pm b\sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2}}$

$\therefore\quad x < a$-এর যে কোনো মানের জন্য y-এর দুইটি মান পাওয়া যায়। মান দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট। অতএব, প্রমাণিত হয় যে, উপবৃত্তটি x-অক্ষ (বৃহৎ অক্ষ) বরাবর প্রতিসম।

আবার, x-এর সর্বোচ্চ মান a এবং সর্বনিম্ন মান $-a$; কারণ, যদি $x > a$ বা, $< -a$ হয়, তবে $\dfrac{a^2 - x^2}{a^2}$ ঋণাত্মক হয় এবং y-এর মান দুইটি অবাস্তব হয়।

অতএব, উপবৃত্তের কোনো অংশই x-অক্ষের উপর A ও A′ বিন্দু দুইটির বাইরে অবস্থিত হবে না।

উপবৃত্তের সমীকরণটিকে নিম্নোক্তভাবেও লেখা চলে,

$$x = \pm a\sqrt{\frac{b^2 - y^2}{b^2}}$$

$\therefore\quad y < b$-এর যে কোনো মানের জন্য x-এর দুইটি মান পাওয়া যাবে। মান দুইটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট।

অতএব, প্রমাণিত হয় যে, উপবৃত্তটি y-অক্ষ (ক্ষুদ্র অক্ষ) বরাবর প্রতিসম।

y-এর সর্বোচ্চ মান b এবং সর্বনিম্ন মান $-b$ কারণ $y > b$ বা $< -b$ হয়, তবে $\frac{b^2 - y^2}{b^2}$ ঋণাত্মক হয় এবং x-এর মান দুইটি অবাস্তব হয়। সুতরাং, উপবৃত্তের কোনো অংশই y-অক্ষের উপর B ও B′-এর বাইরে অবস্থিত হবে না।

অতএব, উপবৃত্ত একটি সীমাবদ্ধ বক্ররেখা, যা পুরাপুরি $x = \pm a$, $y = \pm b$ সরলরেখা চতুষ্টয় দ্বারা সীমিত আয়তের মধ্যে অবস্থিত।

উদাহরণমালা

উদা. 1. লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ $9x^2 + 16y^2 = 144$

সমীকরণটি $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; এটি একটি উপবৃত্ত যার বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 এবং ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য 6; বৃহৎ অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এবং ক্ষুদ্র অক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং কেন্দ্র মূলবিন্দু অর্থাৎ $(0, 0)$.

সমীকরণ থেকে পাই,

$$y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{16}\right)$$

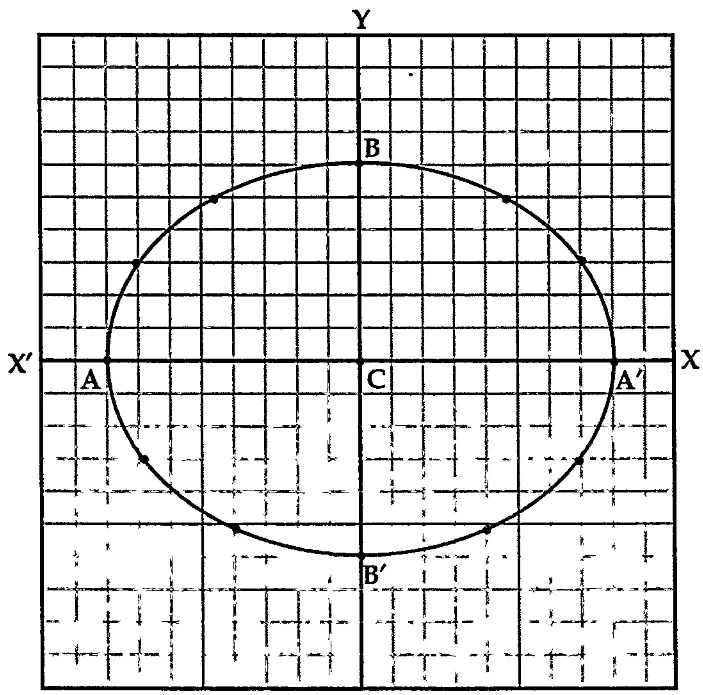
বা, $y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$, যেখানে $-4\le x\le 4$

আবার, $x^2=16\left(1-\frac{y^2}{9}\right)$ বা, $x=\pm\frac{4}{3}\sqrt{9-y^2}$, যেখানে $-3\le y\le 3$

সমীকরণ দুইটি থেকে আমরা লেখের উপরিস্থিত কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

x	4	− 4	0	0	2	2	− 2	− 2	3	3	− 3	− 3
y	0	0	− 3	3	2·6	− 2·6	2·6	− 2·6	1·98	− 1·98	1·98	− 1·98

দেখা যাচ্ছে, (4, 0), (− 4, 0), (0, − 3), (0, 3), (2, 2·6), (2, − 2·6), (− 2, 2·6), (− 2, − 2·6), (3, 1·98), (3, − 1·98), (− 3, 1·98), (− 3, − 1·98) ……… প্রভৃতি বিন্দুগুলি লেখের উপর অবস্থিত। X′CX ও Y′CY রেখা দুইটিকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দুই বাহু সমান এক একক নিয়ে বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। এখন বিন্দুগুলি একটি প্রতিসম বক্ররেখা দ্বারা যোগ করে লেখচিত্রটি পাই।



$9x^2 + 16y^2 = 144$

উদা. 2. $16x^2 + 25y^2 = 400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০২; মা. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০০]

উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ অতএব, $a=5$ এবং $b=4$

যেহেতু $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ $\therefore$ $e^2=\frac{25-16}{25}=\frac{9}{25}$ বা, $e=\frac{3}{5}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ ও $(-ae, 0)$ এখানে উপকেন্দ্র $\left(5 \cdot \frac{3}{5}, 0\right) = (3, 0)$

এবং $\left(-5 \cdot \frac{3}{5}, 0\right) = (-3, 0)$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.16}{5} = \frac{32}{5}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ, $x = \pm ae$ অর্থাৎ, $x = \pm 5 \cdot \frac{3}{5} = \pm 3$

দিকাক্ষের সমীকরণ, $x = \pm \frac{a}{e}$ বা, $x = \pm \frac{5}{\frac{3}{5}}$ বা, $x = \pm \frac{25}{3}$

উদা. 3. p-এর মান কত হলে $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তটির অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১০; য. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০১]

যদি $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তবে $0 + 16p = 80$ বা, $p = 5$ হবে। সুতরাং উপবৃত্তের সমীকরণ হবে $4x^2 + 5y^2 = 80$ বা, $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ বা, $\frac{x^2}{(2\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

সুতরাং, $a = 2\sqrt{5}$ এবং $b = 4$

অতএব, অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য হবে $4\sqrt{5}$ এবং 8.

উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{20 - 16}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ $\therefore e = \frac{1}{\sqrt{5}}$

উদা. 4. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি নির্ণয় কর।

এখানে, $a = 12$ এবং $b = 13$; লক্ষণীয় যে, $a < b$ । সুতরাং, উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষ y-অক্ষের উপর অবস্থিত। অতএব, এক্ষেত্রে $e^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$ বা, $e^2 = \frac{169 - 144}{169} = \frac{25}{169}$ বা, $e = \frac{5}{13}$

সুতরাং, উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(0, \pm be)$ অর্থাৎ, $\left(0, \pm 13 . \frac{5}{13}\right)$ বা, $(0, \pm 5)$.

উদা. 5. $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[কু. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০২]

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{1/5} + \frac{y^2}{1/4} = 1$

এখানে, $a^2 = \frac{1}{5}$, $b^2 = \frac{1}{4}$ এবং উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষ y-অক্ষের উপর অবস্থিত। অতএব, এক্ষেত্রে,

$$e^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{20} \times 4 = \frac{1}{5}$$

অতএব, উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{1}{\sqrt{5}}$

সুতরাং, দিকাক্ষের সমীকরণ $y = \pm \frac{b}{e}$

অর্থাৎ, $y = \pm \frac{1/2}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

উদা. 6. (1, 0) ও (− 1, 0) উপকেন্দ্র এবং 3 উপকেন্দ্রিক লম্ববিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[কু. বো. ২০১১]**

মনে করি, a, b এবং e যথাক্রমে উপবৃত্তের অর্ধ-বৃহৎ অক্ষ, অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ এবং উৎকেন্দ্রিকতা। উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae$

সুতরাং, $2ae = 2$ অর্থাৎ, $ae = 1$ ... ... (1)

উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \frac{2b^2}{a} = 3$

যেহেতু, $b^2 = a^2(1 - e^2)$, অতএব $2a(1 - e^2) = 3$

(1) থেকে $2(1 - e^2) = 3e$ অর্থাৎ, $2e^2 + 3e - 2 = 0$ $\therefore e = \frac{1}{2}$ এবং অন্য মান $e = -2$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore \quad a = \frac{1}{e} = 2$ এবং $b^2 = a^2(1 - e^2) = 4\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3$

যেহেতু, উপকেন্দ্র দুইটি অক্ষের উপর অবস্থিত এবং উপকেন্দ্র দুইটির সংযোজক রেখার মধ্য বিন্দুই মূলবিন্দু। অতএব, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

উদা. 7. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (1, − 1) দিকাক্ষের সমীকরণ $x - y + 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$; এর উপকেন্দ্রিক লম্বও নির্ণয় কর। **[চ. বো. ২০০৬]**

মনে করি, P(x, y) উপবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু, S (1, − 1) উপবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং PM তার দিকাক্ষ $x - y + 2 = 0$-এর উপর লম্ব।

তাহলে সংজ্ঞানুসারে, SP = e PM

বা, $\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - y + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{x - y + 2}{2}$

বা, $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{(x - y + 2)^2}{4}$

বা, $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x + 12y + 4 = 0$, এটিই উপবৃত্তের সমীকরণ।

উপকেন্দ্রিক লম্ব $= LL' = 2e.SZ$

এখন, $SZ = S(1, -1)$ থেকে $x - y + 2 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব

$\therefore \quad SZ = \frac{1 + 1 + 2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\therefore \quad LL' = 2e.SZ = 2.\frac{1}{\sqrt{2}}.2\sqrt{2} = 4$

উদা. 8. উপবৃত্তের বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষ দুইটিকে যথাক্রমে x ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যকার দূরত্ব 8 এবং দিকাক্ষ দুইটির মধ্যকার দূরত্ব 18. **[রা. বো. ২০১০, ২০০৩, ২০০২]**

মনে করি উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ যার উৎকেন্দ্রিকতা e

তাহলে উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যকার দূরত্ব $= 2ae$

এবং দিকাক্ষ দুইটির মধ্যকার দূরত্ব $= \frac{2a}{e}$

প্রশ্নের শর্তানুসারে $2ae = 8$ .... (i)

এবং $\frac{2a}{e} = 18$ ... ... (ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই, $a = 6$ এবং $e = \frac{2}{3}$

এবং $b^2 = a^2(1 - e^2) = 36\left(1 - \frac{4}{9}\right) = 20$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ বা, $5x^2 + 9y^2 = 180$

উদা. 9. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটি S′ (2, 0) ও S (− 2, 0) এবং যা P $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

মনে করি উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$PS = \sqrt{\left(\frac{3}{2}+2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{15}{4}} = 4$$

এবং $$PS' = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{15}{4}} = 2$$

P বিন্দুর ফোকাস দূরত্বের যোগফল বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।

$\therefore \quad 2a = PS + P'S = 4 + 2 = 6 \;\therefore a = 3$

অতএব, উপবৃত্তের সমীকরণ হবে $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

যেহেতু, উপবৃত্ত $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে যায়, অতএব,

$\frac{(3/2)^2}{9} + \frac{(\sqrt{15}/2)^2}{b^2} = 1$

বা, $\frac{1}{4} + \frac{15}{4b^2} = 1$ বা, $3b^2 = 15$

অর্থাৎ, $b^2 = 5$

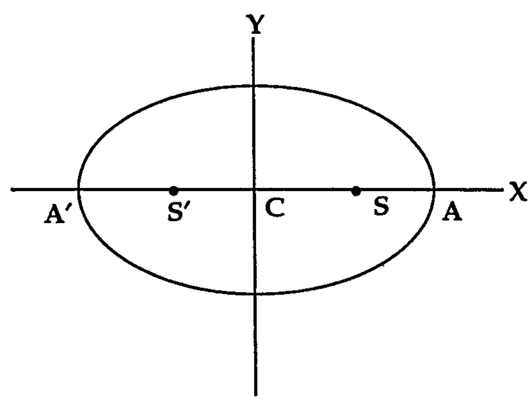
নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

উদা. 10. উপবৃত্তের প্রধান অক্ষদ্বয়কে x ও y অক্ষরেখা হিসাবে বিবেচনা করে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয় (± 2, 0) এবং বৃহৎ অক্ষ = 8 একক। **[দি. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০৩]**

উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষ $AA' = 8$ এবং $S(2, 0)$

এবং $S'(-2,0)$

$\therefore \quad CS = CS' = 2$



মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\therefore \quad 2a = 8,\ a = 4$ এবং $CS = ae$, $ae = 2$

$a = 4,\ \therefore 4e = 2,$ বা, $e = \frac{1}{2}$

এখন, $b^2 = a^2(1 - e^2) = 16\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 16 \times \frac{3}{4} = 12$

অতএব, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

প্রশ্নমালা IV B

1. উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে যথাক্রমে x ও y-অক্ষ ধরে নিম্নলিখিত বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর ঃ (i) $(0, 2\sqrt{2})$ ও $(-3, 0)$, (ii) $(1, \sqrt{6})$ ও $(3, 0)$ [সি. বো. ২০০৯, চ. বো. ২০০২], (iii) $(2, 4)$ ও $(3, 2)$ উত্তর ঃ (i) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ (ii) $3x^2+4y^2=27$ (iii) $12x^2+5y^2=128$

2. নিচের উপবৃত্তগুলির প্রতিটির উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। (i) $9x^2+25y^2=225$ [সি. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০২]

(ii) $3x^2+4y^2=12$ [কু. বো. ২০০৩, ২০০২ ; ব. বো. ২০০১ ; ঢা. বো. ২০০৩]

(iii) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$

উত্তর ঃ উপকেন্দ্র	উপকেন্দ্রিক লম্ব	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	দিকাক্ষের সমীকরণ
(i) $e=\frac{4}{5}$, $(\pm 4, 0)$	18/5	$x=\pm 4$	$4x=\pm 25$
(ii) $e=\frac{1}{2}$, $(\pm 1, 0)$	3	$x=\pm 1$	$x=\pm 4$
(iii) $e=\frac{\sqrt{11}}{6}$, $(0, \pm\sqrt{11})$	$\frac{25}{3}$	$y=\pm\sqrt{11}$	$y=\pm\frac{36}{\sqrt{11}}$

3. p-এর মান কত হলে $px^2+4y^2=1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তের অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৯, ২০০৫; ব. বো. ২০০৯, ২০০৫; রা. বো. ২০০৮, ২০০৪; য. বো. ২০০৩, ২০০০; মা. বো. ২০১১] উত্তরঃ $p=1; 2, 1.$

4. p-এর মান কত হলে $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{5^2}=1$ উপবৃত্তটি $(6, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১, ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৪, ২০০১; সি. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০২; রা. বো. ২০০১]

উত্তর ঃ $p=100, e=\frac{\sqrt{3}}{2}, (\pm 5\sqrt{3}, 0)$

5. উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ বিবেচনা করে প্রদত্ত শর্তানুযায়ী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর ঃ

(i) উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{1}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=8$ [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৫ ; রা. বো. ২০১১, ২০০৬; য. বো. ২০১১, ২০০৯; দি. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৫; মা. বো. ২০১১] উত্তর ঃ $\frac{4x^2}{81}+\frac{y^2}{18}=1$

(ii) উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{2}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $=5$ [চ. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $20x^2+36y^2=405$

(iii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm 3, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$; উপবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণও নির্ণয় কর।

[য. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০০] উত্তর ঃ $8x^2+9y^2=648$; $x=\pm 27.$

(iv) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 4)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{4}{5}$ [চ. বো. ২০১০; সি. বো. ২০১০, ২০০৬]

উত্তর ঃ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$

(v) যার ক্ষুদ্র অক্ষ $=4$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{1}{\sqrt{2}}$ উত্তর ঃ $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

(vi) যার বৃহৎ অক্ষ $=12$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $=\frac{1}{3}$ [য. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০১] উত্তর ঃ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$

6. উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে $(2, 2)$ ও $(3, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। এর উৎকেন্দ্রিকতা ও নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৮, ২০০৬ ; য. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $3x^2+5y^2=32$; $\sqrt{\frac{2}{5}}$

7. $\frac{4}{5}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট ও $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১০, ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৭ ; সি. বো. ২০০১] উত্তর ঃ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

8. (i) কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক। এর উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক। তার উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১১] উত্তর ঃ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

9. উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর ঃ (i) যার উপকেন্দ্র $(3, 4)$, দিকাক্ষ $x+y-2=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$. [য. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০১; ঢা. বো. ২০১০, ২০০৭ ; কু. বো. ২০১০, ২০০২; ব. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৪ ; মা. বো. ২০১০, ২০০৭] উত্তর ঃ $17x^2-2xy+17y^2-104x-140y+446=0$

(ii) যার উপকেন্দ্র $(-2, 3)$, দিকাক্ষ $x-y+7=0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{\sqrt{3}}$. [ব. বো. ২০০৭; মা. বো. ২০০৫] উত্তর ঃ $5x^2+5y^2+2xy+10x-22y+29=0$

(iii) যার উপকেন্দ্র $(-1, 1)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x-y+3=0$ [চ. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৩; রা. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $7x^2+7y^2+2xy+10x-10y+7=0$

10. একটি উপবৃত্তের দিকাক্ষকে y-অক্ষরেখা ধরে উপবৃত্তটি নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা e এবং উপকেন্দ্র $(c, 0)$ বিন্দুতে অবস্থিত। উত্তর ঃ $(x-c)^2+y^2=e^2x^2$

11. $25x^2+16y^2=400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয়। [ঢা. বো. ২০০৯, ২০০২; কু. বো. ২০০৯, ২০০৭; ব. বো. ২০০৮, ২০০৬, ২০০৪; সি. বো. ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৪] উত্তর ঃ $e=\frac{3}{5}$; $(0, \pm 3)$; $\frac{32}{5}$; $y=\pm\frac{25}{3}$

12. $9x^2+16y^2=144$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৭] উত্তর ঃ $(\pm\sqrt{7}, 0)$; $\frac{9}{2}$.

13. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 2)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y+4=0$; তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৩ ; মা. বো. ২০০২] উত্তরঃ $4x^2+3y^2-24y=0$; 6.

14. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(3, -1))$, $(1, -1)$ এবং বৃহৎ অক্ষ $= 2\sqrt{5}$. উত্তর ঃ $4x^2+5y^2-16x+10y+1=0$

15. কোনো উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য তার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যকার দূরত্বের সমান এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব 10 ; উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১০] উত্তর ঃ $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x^2+2y^2=100$.

16. কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(0, 1)$, $(0, -1)$ এবং তার ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য একের সমান ; উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $4x^2+\frac{4y^2}{5}=1$

17. একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ ধরে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্রিক লম্ব তার ক্ষুদ্র অক্ষের অর্ধেক এবং যা $(0, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে ; উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতাও নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $x^2+4y^2=4$, $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. $2x^2+3y^2=1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৬; য. বো. ২০০৪; ব. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৬] উত্তর ঃ $\frac{2}{3}\sqrt{2}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$

19. দেখাও যে, $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে ; এর উপকেন্দ্রিক লম্ব, উৎকেন্দ্রিকতা, কেন্দ্র এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৯]

উত্তর : $\frac{10}{3}$; $\frac{2}{3}$; (3, 0) ; (5 , 0) , (1, 0).

20. দেখাও যে, $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে। এর উৎকেন্দ্রিকতা এবং কেন্দ্র ও উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[মা. বো. ২০০২] উত্তর : $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$; কেন্দ্র (2, 1) ; উপকেন্দ্র (2, 3) ও (2, −1).

21. একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি, স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটি $\frac{x}{9} + \frac{y}{4} = 1$ রেখাকে x-অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ রেখাকে y-অক্ষের উপর ছেদ করে। তার সমীকরণ, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উত্তর : $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$; $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $(\pm 6\sqrt{2}, 0)$

22. একটি উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি, স্থানাংকের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটি $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$ রেখাকে x-অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ রেখাকে y-অক্ষের উপর ছেদ করে। তার সমীকরণ, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুইটির অবস্থান নির্ণয় কর। উত্তর : $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$; $\frac{2\sqrt{6}}{7}$; $(\pm 2\sqrt{6}, 0)$.

23. কোনো উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব 16 ইঞ্চি এবং তার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$; উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১১] উত্তর : 30 ইঞ্চি ও 24 ইঞ্চি।

24. $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটি, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৭ ; সি. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০১১]

উত্তর : উপকেন্দ্র (3, −1), (1, −1) ; উপকেন্দ্রিক লম্ব $8/\sqrt{5}$; উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{1}{\sqrt{5}}$;

দিকাক্ষের সমীকরণ : $x = 7$ এবং $x = -3$.

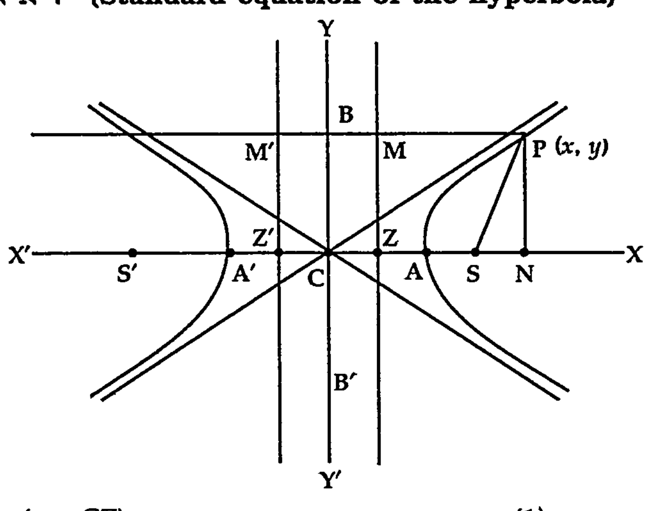
25. কোনো উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা শূন্য হলে, দেখাও যে, উপবৃত্তটি বৃত্তে পর্যবসিত হবে।

26. লেখচিত্র অঙ্কন কর : (i) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (ii) $25x^2 + 4y^2 = 100$ (iii) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{225} = 1$

(iv) $\frac{x^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{20} = 1$ (v) $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$ (vi) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$

(vii) $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

57. অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ (Standard equation of the hyperbola)



মনে করি, S অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র, MZ দিকাক্ষ এবং e (> 1) উৎকেন্দ্রিকতা। দিকাক্ষের উপর SZ লম্ব টানি। SZ-কে e : 1 অনুপাতে যথাক্রমে A ও A′ বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করি যেন SA = e.AZ এবং SA′ = e.A′Z হয়। তাহলে, A ও A′ অধিবৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু।

মনে করি C, AA′-এর মধ্যবিন্দু এবং AA′ $= 2a$, তাহলে CA = CA′ = a।

SA ও SA′-কে কেন্দ্র C থেকে দূরত্বের মাধ্যমে প্রকাশ করলে,

SA = e.AZ বা, $CS - a = e(a - CZ)$ ... ... (1)

SA′ = e. A′Z বা, $CS + a = e(a + CZ)$ ... ... (2)

(1) এবং (2) যোগ করে পাই, $2CS = 2ae$ বা, $CS = ae$

(2) থেকে (1) বিয়োগ করে, $2a = 2e.\,CZ$ বা, $CZ = \frac{a}{e}$

C-কে মূলবিন্দু, CX ও CY-কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরি। অধিবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু P নিই যার স্থানাঙ্ক (x, y)। AX-এর উপর PN এবং দিকাক্ষের উপর PM লম্ব আঁকি।

সংজ্ঞানুসারে,

$SP = e.PM = e.\,NZ \;\therefore\; SP^2 = e^2.\,NZ^2$

বা, $SN^2 + PN^2 = e^2\,(CN - CZ)^2$

বা, $(CN - CS)^2 + PN^2 = e^2\,(CN - CZ)^2$

বা, $(x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$

বা, $x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2\,aex + a^2$

বা, $x^2\,(e^2 - 1) - y^2 = a^2\,(e^2 - 1)$

বা, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2\,(e^2 - 1)} = 1$, যেহেতু $e > 1$, $a^2\,(e^2 - 1)$ ধনাত্মক। অতএব, আমরা লিখতে পারি, $b^2 = a^2\,(e^2 - 1)$, যেখানে b একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

অতএব, আমরা পাই, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; এটিই অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য ঃ CA′-কে বর্ধিত করে x-অক্ষের উপর S′ এবং Z′ দুইটি বিন্দু নিই যেন $CS' = CS = ae$ এবং $CZ' = CZ = \frac{a}{e}$। Z′M′ এবং PM′ যথাক্রমে AA′ ও Z′M′-এর উপর লম্ব আঁকি। অধিবৃত্তের সমীকরণ থেকে এটি প্রমাণ করা যাবে যে, $S'P^2 = e^2.\,PM'^2$ । অতএব, S′ অধিবৃত্তের দ্বিতীয় উপকেন্দ্র এবং Z′M′ দ্বিতীয় দিকাক্ষ।

A এবং A′ বিন্দু দুইটিকে অধিবৃত্তের শীর্ষ বিন্দু ও C-কে অধিবৃত্তের কেন্দ্র বলে। AA′-কে আড় অক্ষ (transverse axis) এবং BB′-কে অনুবন্ধী অক্ষ (conjugate axis) বলে। উল্লেখ্য যে, $CB = CB' = b$.

অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ হলে, আমরা নিচের ফলগুলি পাই ঃ

(i) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 0)$

(ii) উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$

(iii) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\pm a, 0)$

(iv) আড় অক্ষের সমীকরণ $y = 0$

(v) অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ $x = 0$

(vi) দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e}$

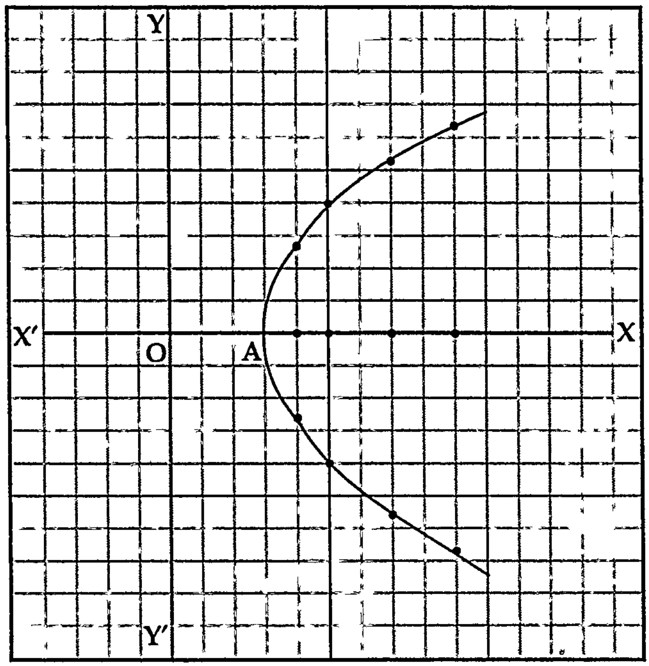
(vii) উৎকেন্দ্রিকতা $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$

(viii) উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \frac{2b^2}{a}$

(ix) অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য $2a$ ও $2b$.

প্রতিসম এবং পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে $x = 3$ রেখার ডানদিকে xy-তলের প্রথম ও চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। 3 এবং 3 এর চেয়ে বৃহত্তর x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর সংশ্লিষ্ট মানগুলি নির্ণয় করি।

x	3	4	4	5	5	7	7	9	9
y	0	2·82	−2·82	4	−4	5·64	−5·64	6·9	−6·9



$y^2 = 8(x-3)$

দেখা যাচ্ছে, (3, 0) পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং পরাবৃত্তটি (4, 2·82), (4, −2·82), (5, 4), (5, −4), (7, 5·64), (7, −5·64), (9, 6·9), (9, −6·9) ..... প্রভৃতি বিন্দুগুলি দিয়ে যায়। ছক কাগজে X′OX এবং Y′OY রেখা দুইটিকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে, ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু সমান এক একক নিয়ে বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। এখন, বিন্দুগুলি একটি সুষম বক্ররেখার সাহায্যে যোগ করে $y^2 = 8(x-3)$ পরাবৃত্তের লেখ পাই।

উদা. 2. $3y^2 = 5x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

পরাবৃত্তের সমীকরণ $3y^2 = 5x$ অথবা, $y^2 = \frac{5}{3}x$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{5}{3}$

যেহেতু, শীর্ষবিন্দু থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব উপকেন্দ্রিক লম্বের এক চতুর্থাংশ,

সুতরাং, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5}{12}, 0\right)$

উদা. 3. $y^2 = 8px$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যখন পরাবৃত্তটি (4, −8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

যেহেতু পরাবৃত্তটি (4, −8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

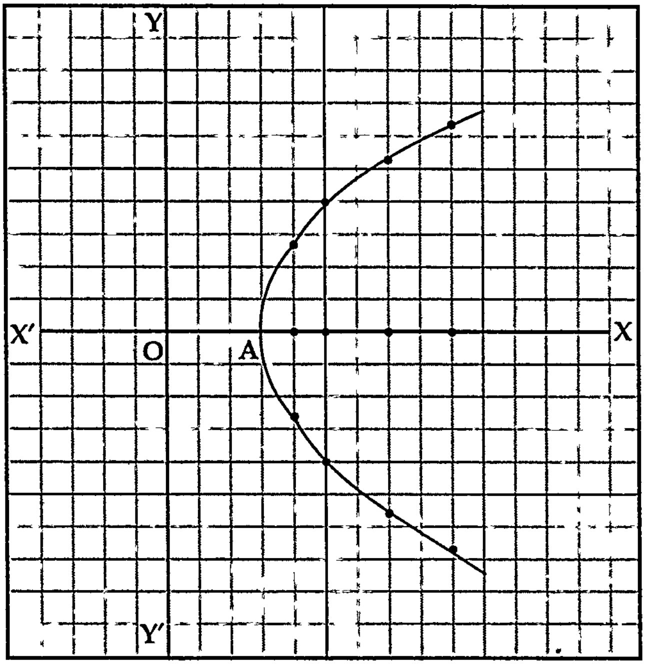
$(-8)^2 = 8p.\ 4$, অর্থাৎ, $p = 2$

অতএব, পরাবৃত্তের সমীকরণ দাঁড়ায়, $y^2 = 16x$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 16.

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{16}{4}, 0\right)$ অর্থাৎ, (4, 0).

প্রতিসম এবং পরাবৃত্তটি সম্পূর্ণরূপে $x = 3$ রেখার ডানদিকে xy-তলের প্রথম ও চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। 3 এবং 3 এর চেয়ে বৃহত্তর x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর সংশ্লিষ্ট মানগুলি নির্ণয় করি।

x	3	4	4	5	5	7	7	9	9
y	0	2·82	−2·82	4	−4	5·64	−5·64	6·9	−6·9



$y^2 = 8(x-3)$

দেখা যাচ্ছে, (3, 0) পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং পরাবৃত্তটি (4, 2·82), (4, −2·82), (5, 4), (5, −4), (7, 5·64), (7, −5·64), (9, 6·9), (9, −6·9) ..... প্রভৃতি বিন্দুগুলি দিয়ে যায়। ছক কাগজে X′OX এবং Y′OY রেখা দুইটিকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে, ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু সমান এক একক নিয়ে বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। এখন, বিন্দুগুলি একটি সুষম বক্ররেখার সাহায্যে যোগ করে $y^2 = 8(x-3)$ পরাবৃত্তের লেখ পাই।

উদা. 2. $3y^2 = 5x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

পরাবৃত্তের সমীকরণ $3y^2 = 5x$ অথবা, $y^2 = \frac{5}{3}x$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{5}{3}$

যেহেতু, শীর্ষবিন্দু থেকে উপকেন্দ্রের দূরত্ব উপকেন্দ্রিক লম্বের এক চতুর্থাংশ,

সুতরাং, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5}{12}, 0\right)$

উদা. 3. $y^2 = 8px$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যখন পরাবৃত্তটি (4, −8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

যেহেতু পরাবৃত্তটি (4, −8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$(-8)^2 = 8p.\ 4$. অর্থাৎ, $p = 2$

অতএব, পরাবৃত্তের সমীকরণ দাঁড়ায়, $y^2 = 16x$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 16.

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{16}{4}, 0\right)$ অর্থাৎ, (4, 0).

58. অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

উপকেন্দ্র (α, β), দিকাক্ষ $lx + my + n = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $e\ (> 1)$ হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ।

মনে করি P (x, y) অধিবৃত্তের উপর যে কোনো একটি বিন্দু। অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র S। P বিন্দু থেকে দিকাক্ষের উপর PM লম্ব আঁকি।

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে $SP = e.\, PM$, অথবা $SP^2 = e^2.\, PM^2$

অথবা, $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = e^2 \dfrac{(lx + my + n)^2}{l^2 + m^2}$

এটিই, অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ।

59. অধিবৃত্তের লেখচিত্র

(i) অধিবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ থেকে দেখা যাচ্ছে যে, যখন $y = 0$, $x = \pm a$। অতএব, অধিবৃত্ত x-অক্ষকে A$'(-a, 0)$ এবং A$(a, 0)$ বিন্দু দুইটিতে ছেদ করে। পূর্বেই উল্লেখ করা হয়েছে যে, বিন্দু দুইটি অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং AA$'$ অধিবৃত্তের আড় অক্ষ।

(ii) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণে $x = 0$ হলে, $y^2 = -b^2$ । এক্ষেত্রে y-এর কোনো বাস্তব মান পাওয়া যায় না। আমরা y-অক্ষের উপর B$'(0, -b)$ এবং B$(0, b)$ দুইটি বিন্দু নিই। উল্লেখ্য যে, BB$'$ অধিবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ।

(iii) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের সমীকরণ থেকে পাই, $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{y^2}{b^2} \geq 1$ $\therefore$ $x^2 \geq a^2$, অতএব $|x| \geq a$ । সুতরাং $x = a$ এবং $x = -a$ এই সরলরেখা দুইটির মধ্যে লেখের কোনো বিন্দু নেই। প্রত্যেক অধিবৃত্তের তাই দুইটি বিচ্ছিন্ন শাখা রয়েছে। যদি (x, y) লেখের উপর কোনো বিন্দু হয় তবে $(-x, y)$ বিন্দুটিও লেখের উপর অবস্থিত। অর্থাৎ, লেখটি y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। অনুরূপভাবে এটি দেখানো যায় যে লেখটি x-অক্ষের সাপেক্ষেও প্রতিসম। x-এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে, y-এর মান অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি হয়। অতএব, অধিবৃত্ত দুই দিকে অসীমে বিস্তৃত হয়।

উদাহরণমালা

উদা. 1. লেখচিত্র অঙ্কন কর : $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1.$

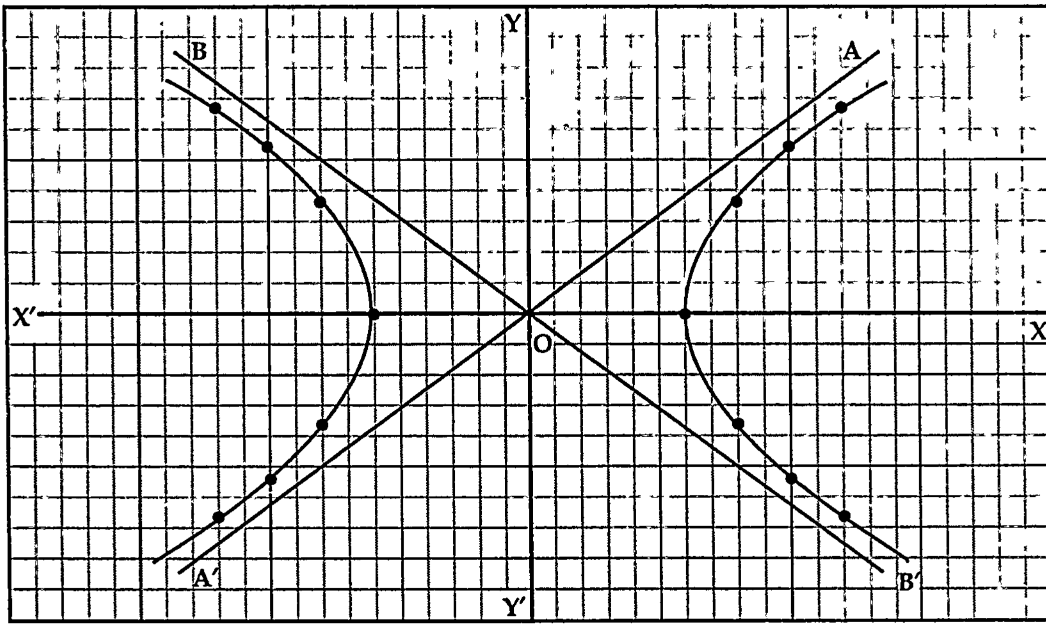
$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ অথবা, $\dfrac{x^2}{9} = 1 + \dfrac{y^2}{4} \geq 1$; অতএব, $x^2 \geq 9$ বা, $|x| \geq 3$ অথবা, $-3 \geq x \geq 3$। অতএব, $x = 3$ এবং $x = -3$ এই দুটো উল্লম্ব রেখার মধ্যে লেখের কোনো বিন্দু নেই। যদি (x, y) লেখের উপর কোনো বিন্দু হয়, তবে $(-x, y)$ এবং $(x, -y)$ বিন্দু দুইটিও লেখের উপর অবস্থিত। অর্থাৎ, লেখচিত্রটি x-অক্ষ এবং y-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম। x-এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y-এর মানও অসীম পর্যন্ত বাড়ে।

এখন, আমরা লেখের উপর কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

x	3	−3	4	4	−4	−4	5	5	−5	−5	6	6	−6	−6
y	0	0	1'76	−1'76	1'76	−1'76	2'67	−2'67	2'67	−2'67	3'46	−3'46	3'46	−3'46

দেখা যাচ্ছে, (3, 0), (− 3, 0), (4, 1'76), (4, − 1'76), (− 4, 1'76), (− 4, − 1'76) ... ... প্রভৃতি বিন্দুগুলি লেখের উপর অবস্থিত।

এখন X′OX ও Y′OY রেখা দুইটিকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দুই বাহু সমান এক একক নিয়ে বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুগুলি একটি সুষম বক্ররেখা দ্বারা যোগ করে লেখচিত্রটি পাই।



$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

উদা. 2. $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৩]

এখানে, $a^2=144$ এবং $b^2=25$ এবং $b^2=a^2(e^2-1)$

$\therefore \quad 25=144(e^2-1)$

অথবা, $e^2-1=\frac{25}{144}$ অথবা, $e^2=1+\frac{25}{144}=\frac{169}{144}$ অথবা, $e=\frac{13}{12}$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)=\left(\pm 12.\frac{13}{12}, 0\right)=(\pm 13, 0)$

উদা. 3. $x^2-3y^2-2x=8$ অধিবৃত্তের অক্ষের দৈর্ঘ্য এবং উৎকেন্দ্রিকতা এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৭ ; ঢা. বো. ২০০৫]

অধিবৃত্তের সমীকরণ, $x^2-3y^2-2x=8$

বা, $x^2-2x+1-3y^2=9$

বা, $(x-1)^2-3y^2=9$

বা, $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

এখানে $a^2=9$ এবং $b^2=3$

অতএব, $b^2=a^2(e^2-1)$ থেকে পাই,

$3=9(e^2-1)$ বা, $e^2-1=\frac{1}{3}$

বা, $e^2=\frac{4}{3}$ $\therefore$ $e=\frac{2}{\sqrt{3}}$

আড় অক্ষ $= 2a = 6$, অনুবন্ধী অক্ষ $= 2b = 2\sqrt{3}$

অধিবৃত্তের সমীকরণে $x - 1 = X$ এবং $y = Y$ লিখে পাই

$$\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{3} = 1$$

$\therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $X = 0$ বা, $x - 1 = 0$ বা, $x = 1$

এবং $Y = 0$ বা, $y = 0$; অতএব, কেন্দ্র $(1, 0)$.

উদা. 4. অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রিকতা, অক্ষ ও উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। (i) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ (ii) $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ (iii) $2x^2 - y^2 = 4$

(i) অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$

এখানে, $a = 3$ এবং $b = 2$

কেন্দ্র $(0, 0)$; শীর্ষবিন্দু $(3, 0)$ ও $(-3, 0)$

$$e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{9 + 4}{9} = \frac{13}{9} \therefore e = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0) = \left(\pm 3.\frac{\sqrt{13}}{3}, 0\right) = (\pm\sqrt{13}, 0)$

আড় অক্ষ $= 6$ এবং অনুবন্ধী অক্ষ $= 4$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.2^2}{3} = \frac{8}{3}$

দিকাক্ষের সমীকরণ ঃ $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{3}{\frac{\sqrt{13}}{3}}$

বা, $x = \pm\frac{9}{\sqrt{13}}$

(ii) অধিবৃত্তের সমীকরণে x এবং y-এর স্থান পরিবর্তন হয়েছে। সুতরাং আড় অক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং অনুবন্ধী অক্ষ x-অক্ষ বরাবর।

কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 0)$

শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(0, \pm\sqrt{2})$

উৎকেন্দ্রতা $e^2 = \frac{b^2 + a^2}{b^2} = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2} \quad \therefore \quad e = \sqrt{\frac{3}{2}}$

উপকেন্দ্র $\left(0, \pm\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = (0, \pm\sqrt{3})$

আড় অক্ষ $= 2b = 2\sqrt{2}$

অনুবন্ধী অক্ষ $= 2a = 2\sqrt{1} = 2$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2.1^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

দিকাক্ষের সমীকরণ $y = \pm\frac{b}{e} = \frac{\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

বা, $y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) অধিবৃত্তের সমীকরণ $2x^2 - y^2 = 4$

অথবা, $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 0)$

শীর্ষবিন্দু $(\pm\sqrt{2}, 0)$

উৎকেন্দ্রতা $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \therefore\ e = \sqrt{3}$

উপকেন্দ্র $(\pm ae, 0) = (\pm\sqrt{2}\sqrt{3}, 0) = (\pm\sqrt{6}, 0)$

আড় অক্ষ $= 2a = 2\sqrt{2}$

অনুবন্ধী অক্ষ $= 2b = 2.2 = 4$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.2^2}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

দিকাক্ষের সমীকরণ $x = \pm\frac{a}{e}$

বা, $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

উদা. 5. একটি অধিবৃত্ত (6, 4) ও (− 3, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১১, ২০০৪; চ. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৬]

মনে করি, অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

যেহেতু এটি $(6, 4)$ ও $(-3, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায়, অতএব,

$\frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$ এবং $\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$

সমাধান করে পাই, $a^2 = \frac{36}{5}$ ও $b^2 = 4$

অতএব, অধিবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{5x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

উদা. 6. উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (2, 2), উৎকেন্দ্রিকতা 2 এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $x + y = 9$ হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

এখানে $S(2, 2), e = 2$; অধিবৃত্তের উপর $P(x, y)$ যে কোনো বিন্দু এবং PM, দিকাক্ষ $x + y - 9 = 0$-এর উপর লম্ব।

অধিবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে,

$SP = e. PM$, বা, $SP^2 = e^2. PM^2$

বা, $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4.\frac{(x+y-9)^2}{2}$

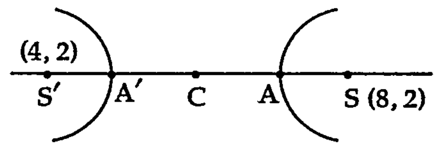
বা, $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 2x^2 + 2y^2 + 162 + 4xy - 36x - 36y$

অথবা, $x^2 + y^2 + 4xy - 32x - 32y + 154 = 0$

উদা. 7. উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (4, 2) ও (8, 2) এবং উৎকেন্দ্রিকতা 2 হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১১, ২০০২

$2. CS = SS'$ অথবা, $2.CS = 4$ অথবা, $CS = 2$

$CA = \frac{CS}{e} = \frac{2}{2} = 1 \therefore a = 1$



এখন, $b^2 = a^2(e^2 - 1) = 4 - 1 = 3$

C-এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{8+4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (6, 2)$

অতএব, অধিবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x-6)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$

উদা. 8. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক ও দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা. বো. ২০১১, ২০০৭; য. বো. ২০১০, ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৬, ২০০০; মা. বো. ২০১০]

মনে করি, অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e

তাহলে $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ থেকে পাই,

$16 = 9(e^2 - 1)$

বা, $e^2 - 1 = \frac{16}{9}$

বা, $e^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9} \quad \therefore e = \frac{5}{3}$

উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক $= (\pm ae, 0) = \left(\pm 3 \times \frac{5}{3}, 0\right)$

$= (\pm 5, 0)$

দিকাক্ষের সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e}$ বা, $x = \pm\frac{3}{\frac{5}{3}}$

বা, $x = \pm\frac{3 \times 3}{5}$

বা, $x = \pm\frac{9}{5}$

উদা. 9. যে অধিবৃত্তের নিয়ামক $2x + y = 1$, উপকেন্দ্র (1, 1) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৯, ২০০৮, ২০০৪, ২০০০ ; দি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০৪ ; য. বো. ২০০৮, ২০০৩ ; ব. বো. ২০০৮; রা. বো. ২০০১; মা. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৭]

মনে করি, P (x, y) অধিবৃত্তের উপর যে কোনো বিন্দু S(1, 1) অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র এবং PM, P বিন্দু থেকে $2x + y - 1 = 0$-এর লম্ব দূরত্ব। তাহলে, অধিবৃত্তের সংজ্ঞা থেকে পাই,

$SP = e.PM$ বা, $SP^2 = e^2.PM^2$

বা, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 3\frac{(2x+y-1)^2}{5}$

বা, $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = \frac{3}{5}(4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 2y - 4x)$

বা, $5x^2 + 5y^2 - 10x - 10y + 10 = 12x^2 + 3y^2 + 12xy - 6y - 12x + 3$

বা, $7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$

প্রশ্নমালা IV C

1. অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র এবং অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(i) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ (ii) $y^2 - x^2 = 1$ (iii) $3y^2 - x^2 = 9$

(iv) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$

[কু. বো. ২০১১, ২০০১; সি. বো. ২০০৬; মা. বো. ২০০৯, ২০০৩]

(v) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ [রা. বো. ২০০৮, ২০০৪; কু. বো. ২০০৫]

উত্তর ঃ (i) কেন্দ্র $(0, 0)$; শীর্ষ $(\pm 3, 0)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$; উপকেন্দ্র $(\pm \sqrt{13}, 0)$; $6, 4$

(ii) কেন্দ্র $(0, 0)$; শীর্ষ $(0, \pm 1)$; $e = \sqrt{2}$; উপকেন্দ্র $(0, \pm \sqrt{2})$; $2, 2$

(iii) কেন্দ্র $(0, 0)$; শীর্ষ $(0, \pm \sqrt{3})$; $e = 2$; উপকেন্দ্র $(0, \pm 2\sqrt{3})$; $2\sqrt{3}, 6$

(iv) কেন্দ্র $(1, -2)$; শীর্ষ $(5, -2), (-3, -2)$; $e = \frac{5}{4}$; উপকেন্দ্র $(6, -2), (-4 -2)$; $8, 6$

(v) কেন্দ্র $(0, 0)$; শীর্ষ $(\pm 5, 0)$; $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$; উপকেন্দ্র $(\pm \sqrt{41}, 0)$; $10, 8$

2. একটি অধিবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি বরাবর। অধিবৃত্তটি $(-2, 1)$ এবং $(-3, -2)$ বিন্দুগামী হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৯] উত্তর ঃ $3x^2 - 5y^2 = 7$

3. দেখাও যে, $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $3x = \pm 4$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

[কু. বো. ২০১০; য. বো. ২০০৭ ; ব. বো. ২০০৪]

4. এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(1, -8)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$ এবং দিকাক্ষ $3x - 4y = 10$. [রা. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৫; ঢা. বো. ২০১০, ২০০৬; ব. বো. ২০১০, ২০০৫, ২০০৩; সি. বো. ২০০৭, ২০০৪; কু. বো. ২০০৬, ২০০৩; য. বো. ২০০৬, ২০০২; চ. বো. ২০০৬, ২০০৪]

উত্তর ঃ $4x^2 + 11y^2 - 24xy - 50x - 225 = 0$

5. একটি অধিবৃত্তের আড় অক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং এর কেন্দ্র মূল বিন্দুতে। অধিবৃত্তটি $(4, 6)$ এবং $(-1, -3)$ বিন্দুগামী হলে এর সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $5y^2 - 9x^2 = 36$

6. একটি অধিবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। আড় অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 ও 8 হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ $16x^2 - 9y^2 = 144$

7. অধিবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 13)$. [য. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৭] উত্তর ঃ $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$

8. অধিবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র মূলবিন্দু, একটি উপকেন্দ্র $(4, 0)$ এবং একটি শীর্ষ $(3, 0)$. উত্তর ঃ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

9. একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব 16 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ এবং এর অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ বরাবর। অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০৩] উত্তর ঃ $x^2 - y^2 = 32$

10. এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার আড় অক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং অনুবন্ধী অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এবং যার শীর্ষ বিন্দু দুইটির দূরত্ব 2 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$. [চ. বো. ২০১০] উত্তর ঃ $y^2 - x^2 = 1$

11. লেখচিত্র অংকন কর ঃ

(i) $25x^2 - 16y^2 = 400$

(ii) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

(iii) $3y^2 - x^2 = 9$

(iv) $\frac{5x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

(v) $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$

(vi) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

(vii) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$

পঞ্চম অধ্যায়

ভেক্টর

VECTORS

60. ভেক্টর রাশি

আমরা দৈনন্দিন কাজে ও বিজ্ঞানে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ভর, ত্বরণ, ওজন, সরণ, বল প্রভৃতি রাশিগুলি সম্পর্কে অবহিত হই। এই রাশিগুলি সব একই প্রকারের রাশি নয়। শুধু পরিমাণ জানা থাকলে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ভর প্রভৃতি রাশিগুলিকে জানা যায়। এ ধরনের রাশিকে স্কেলার রাশি বলে। সুতরাং, স্কেলার রাশির সাথে শুধুমাত্র এর মানই সংশ্লিষ্ট। কিন্তু বল, ত্বরণ, ওজন প্রভৃতি রাশির সাথে মান এবং দিক দুইটি জিনিসই সংশ্লিষ্ট এবং এদেরকে পুরোপুরি জানতে হলে এদের মান এবং দিক দুইটি সত্তাই বিবেচনায় আনতে হয়। এরূপ রাশিকে ভেক্টর রাশি বলে।

সংজ্ঞা ঃ যে রাশির মান এবং দিক আছে তাকে ভেক্টর রাশি বলে।

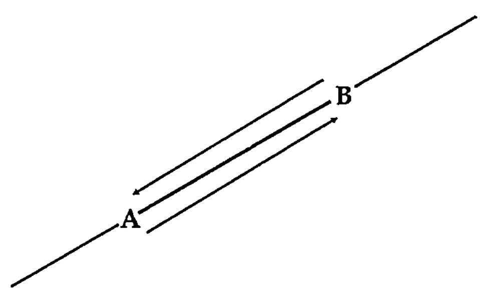
61. সদিক রেখাংশ (Directed lines segment)

ভেক্টর রাশি প্রকাশের জন্য সদিক রেখাংশ একটি উপযুক্ত মাধ্যম। দুইটি বিন্দু A, B দ্বারা নির্ধারিত একটি সরলরেখার অংশকে রেখাংশ বলে। AB রেখাংশের সঙ্গে A বিন্দু হতে B বিন্দু নির্দেশকারী অথবা B বিন্দু হতে A বিন্দু নির্দেশকারী দিক, এই দুইটি (পরস্পর বিপরীতমুখী) দিকের যে কোনো একটিকে সংযুক্ত করা হলে তাকে আমরা সদিক রেখাংশ বলব। এই দুইটি সদিক রেখাংশকে যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BA}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। A, B কে সদিক রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$-এর যথাক্রমে আদি ও প্রান্ত বিন্দু বলে। সদিক রেখাংশের আদি ও প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থান পরিবর্তনযোগ্য নয় ;

অর্থাৎ $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BA}$ এক নয়।

সদিক রেখাংশের দৈর্ঘ্য, ধারক রেখা এবং দিক ঃ

প্রতিটি সদিক রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$-এর সাথে দৈর্ঘ্য, ধারক রেখা এবং দিক সংশ্লিষ্ট থাকে।



দৈর্ঘ্য ঃ $\overrightarrow{AB}$-এর দৈর্ঘ্যকে $|\overrightarrow{AB}|$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। স্পষ্টতই, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

ধারক রেখা (Support) ঃ সদিক রেখাংশটি যে অসীম সরলরেখার অংশ তাকে সদিক রেখাংশটির ধারক রেখা বলে।

দিক (Direction or Sense) ঃ $\overrightarrow{AB}$-এর দিক A বিন্দু থেকে B বিন্দুর দিকে এবং $\overrightarrow{BA}$-এর দিক B থেকে A বিন্দুর দিক বরাবর। অর্থাৎ, সদিক রেখাংশের দিক হচ্ছে তার আদি বিন্দু থেকে প্রান্ত বিন্দু নির্দেশিত দিক।

প্রত্যেক ভেক্টরকে (যার দৈর্ঘ্য শূন্য নয়) সদিক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়; সদিক রেখাংশের দৈর্ঘ্য ভেক্টরের মান এবং সদিক রেখাংশের দিকটি ভেক্টরের দিক নির্দেশ করে।

62. ভেক্টরের প্রতীক

ভেক্টর রাশিকে একটি মাত্র অক্ষর দ্বারাও নির্দেশ করা যেতে পারে। যেমন ঃ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$|\vec{a}|$ সংকেতটি ভেক্টরের দৈর্ঘ্য তথা মান নির্দেশ করে।

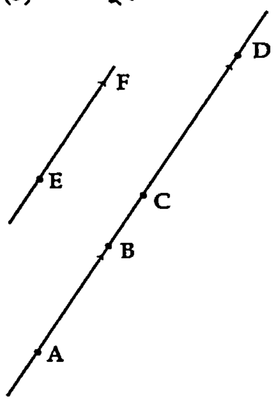
63. ভেক্টরের সমতা

দুইটি ভেক্টরকে সমান বলা হয় যখন, তাদের

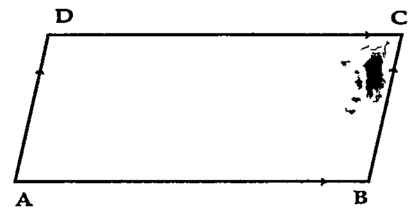
(1) ভেক্টর দুইটির ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল সরলরেখা।

(2) ভেক্টর দুইটির দিক অভিন্ন।

(3) ভেক্টর দুইটির দৈর্ঘ্য সমান।



অতএব দেখা যাচ্ছে যে, দুইটি ভিন্ন সদিক রেখাংশ একই ভেক্টর নির্দেশ করতে পারে। যেমন $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরগুলি সমান ভেক্টর নির্দেশ করে। কেননা তাদের দৈর্ঘ্য সমান, ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল এবং দিক একই।

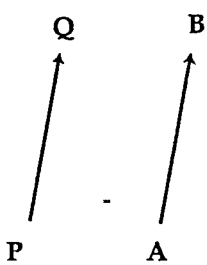


আমরা জানি সামান্তরিকের বিপরীত বাহুযুগল সমান। সুতরাং

ABCD সামান্তরিকে আমরা পাই, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

দ্রষ্টব্য ঃ দৈর্ঘ্য সমান অথবা ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল সরলরেখা হলেও দুইটি ভেক্টর সমান নাও হতে পারে। দুইটি ভেক্টরকে সমান হতে হলে অধিকন্তু তাদের দিকও একই হতে হবে। [অনুচ্ছেদ 69 দ্রষ্টব্য]

64. প্রদত্ত ভেক্টরের সমান ভেক্টর অঙ্কন



একটি ভেক্টরকে ভিন্ন আর একটি সমান ভেক্টর দ্বারা যে কোনো বিন্দুতে প্রতিস্থাপন করা যায়।

$\overrightarrow{AB}$ একটি প্রদত্ত ভেক্টর, P যে কোনো একটি বিন্দু ; P বিন্দুর মধ্য দিয়ে AB-এর সমান্তরাল করে রেখা আঁকা হলো। P বিন্দুটি এমনভাবে নেয়া হলো যেন তা B বিন্দু AB রেখার যে দিকে অবস্থিত Q বিন্দু PQ রেখায় সেই একই দিকে অবস্থিত এবং AB রেখাংশের দৈর্ঘ্য PQ রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমান। অতএব $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর = $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টর।

65. শূন্য ভেক্টর (Zero Vector)

যে ভেক্টরের আদি ও প্রান্ত বিন্দু একই তাকে শূন্য ভেক্টর বলে। শূন্য ভেক্টরের দৈর্ঘ্য অর্থাৎ মান শূন্য। অতএব যে কোনো বিন্দুকে P-কে শূন্য ভেক্টররূপে বিবেচনা করা যেতে পারে এবং P বিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখাকে তার ধারক ধরা যায়।

শূন্য ভেক্টরকে মোটা হরফে 0 শূন্য দ্বারা নির্দেশ করা হয়। শূন্য ভেক্টরের বৈশিষ্ট্য, স্কেলার 0 (শূন্য)-এর অনুরূপ।

66. স্কেলার (Scalar)

ভেক্টর প্রসঙ্গে বাস্তব সংখ্যাকে স্কেলার বলা হয়। সংজ্ঞা অনুযায়ী $|m| = m$ যদি $m \geq 0$ হয় এবং $|m| = -m$ যদি m ঋণাত্মক হয়।

67. একক ভেক্টর (Unit Vector)

কোনো ভেক্টরের দৈর্ঘ্য অথবা মান 1 হলে তাকে একক ভেক্টর বলে। মান শূন্য নয় এরূপ একটি ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টর রাশিটির দিকে অথবা তার সমান্তরাল দিকে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

যদি $\vec{a}$ একটি ভেক্টর রাশি হয় যার মান $|\vec{a}|$, যেখানে $|\vec{a}| \neq 0$ তাহলে $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, ভেক্টর $\vec{a}$-এর দিকে অথবা এর সমান্তরাল দিকে একটি একক ভেক্টর হবে।

68. বিপরীত ভেক্টর (Opposite Vector)

ভেক্টর $\vec{B}$-কে ভেক্টর $\vec{A}$-এর বিপরীত ভেক্টর বলা হয় যদি

(1) ভেক্টর দুইটির ধারক একই অথবা সমান্তরাল সরলরেখা।

(2) ভেক্টর দুইটির দৈর্ঘ্য সমান।

(3) ভেক্টর দুইটির দিক পরস্পর বিপরীত।

সুতরাং $\overrightarrow{AB}$-এর বিপরীত ভেক্টর $\overrightarrow{BA}$ এবং $\overrightarrow{BA}$-এর বিপরীত ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$.

ভেক্টরের সমতার সংজ্ঞা হতে বুঝা যায় প্রত্যেক ভেক্টরের একটিমাত্র বিপরীত ভেক্টর রয়েছে।

$\vec{a}$-এর বিপরীত ভেক্টরকে $-\vec{a}$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

মন্তব্য ঃ ধনাত্মক ভেক্টর বা ঋণাত্মক ভেক্টর বলে কিছু নেই।

69. ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণিতক

মনে করি $\vec{a}$ একটি ভেক্টর এবং m একটি স্কেলার। $m\vec{a}$ সংকেতটি ভেক্টর $\vec{a}$-এর m গুণিতক বোঝায়।

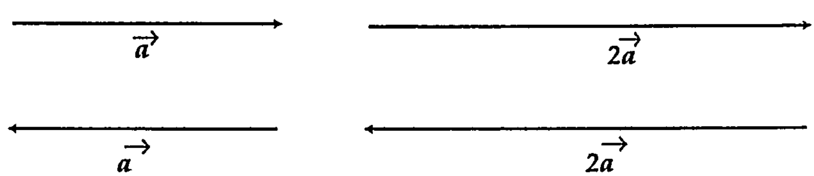
m গুণিতকের সংজ্ঞা নিম্নরূপ ঃ

1. $m\vec{a} = 0$ যখন $\vec{a} = 0$

2. $\vec{a}$ অশূন্য হলে (i) $m\vec{a}$-এর ধারক রেখা $\vec{a}$-এর ধারক রেখা (অথবা সমান্তরাল সরলরেখা)।

(ii) $m\vec{a}$-এর দৈর্ঘ্য $\vec{a}$-এর দৈর্ঘ্যের $|m|$ গুণ ; অর্থাৎ $|m\vec{a}| = |m|\,|\vec{a}|$.

(iii) $m\vec{a}$-এর দিক এবং $\vec{a}$-এর দিক একই যখন $m > 0$; $m\vec{a}$ এবং $\vec{a}$-এর দিক পরস্পর বিপরীত যখন $m < 0$.



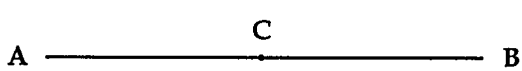
ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণিতক গঠনের সংজ্ঞা থেকে নিচের বিধিগুলি স্বাভাবিক ভাবেই এসে যায়।

(i) $(mn)\vec{a} = m(n)\vec{a}$

(ii) $m(-\vec{a}) = (-m)\vec{a} - m\vec{a}$

বিশেষত $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

(iii) $0\vec{a} = 0$, স্কেলার শূন্য দ্বারা $\vec{a}$ ভেক্টরের গুণিতক শূন্য ভেক্টর। উল্লেখ্য যে বাম পক্ষের শূন্যটি স্কেলার কিন্তু ডান পক্ষের শূন্যটি ভেক্টর।



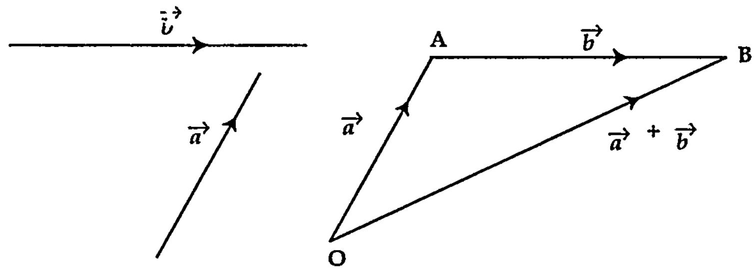
(iv) যদি দুইটি অশূন্য ভেক্টরের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল সরলরেখা হয়, তবে একটি ভেক্টরকে অন্যটির একটি স্কেলার গুণিতক হিসেবে বিবেচনা করা যায়।

বাস্তবিক $m = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ হলে $\vec{b} = m\vec{a}$ যখন $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর দিক একই এবং $\vec{b} = -m\vec{a}$ যখন $\vec{A}$. $\vec{B}$ এর দিক পরস্পর বিপরীত।

যদি C বিন্দু AB সরলরেখাংশের মধ্যবিন্দু হয় তবে, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

70. ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজ বিধি (Triangle Law of vector addition)

মনে করি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুইটি ভেক্টর ; O যে কোনো একটি বিন্দু নেয়া হলো।



$\vec{a}$ বিন্দু থেকে $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ আঁকা হল যাতে ভেক্টর $\vec{a}$ প্রান্ত বিন্দু ভেক্টর $\vec{b}$-এর আদি বিন্দু হয়।

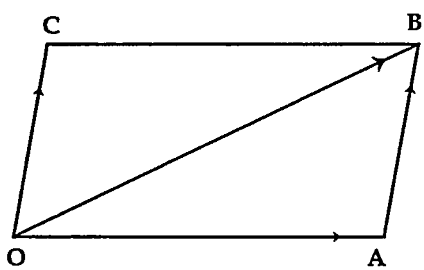
সংজ্ঞানুযায়ী $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টর-কে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের যোগফল বলা হয় এবং আমরা লিখি;

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$

সংজ্ঞা থেকে পাই, (i) $\vec{a} + 0 = \vec{a}$, যেখানে $\vec{a}$ একটি ভেক্টর এবং 0 শূন্য ভেক্টর।

(ii) $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$, কেননা তখন $-\vec{a} = \overrightarrow{AO}$ ফলে $\vec{a} + (-1)\vec{a} = 0$

(iii) $1(\vec{a}) = \vec{a}$



ভেক্টরের যোগের সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram Law of vector addition)

ধারক রেখাদ্বয় একই রেখা বা সমান্তরাল নয় এরূপ দুইটি ভেক্টরের যোগফল নির্ণয়ের জন্য সামান্তরিক বিধি প্রয়োগ করা যায়। আমরা $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ আঁকি। এরপর OABC সামান্তরিকটি আঁকি। তাহলে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী OB রেখাংশটি সামান্তরিকের O বিন্দুগামী কর্ণ এর $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OB}$

কিন্তু ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ = ভেক্টর $\overrightarrow{OC}$. কেননা AB = OC

অতএব $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$. সামান্তরিক বিধি হতে দেখা যায় যে, $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB}$. সুতরাং $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

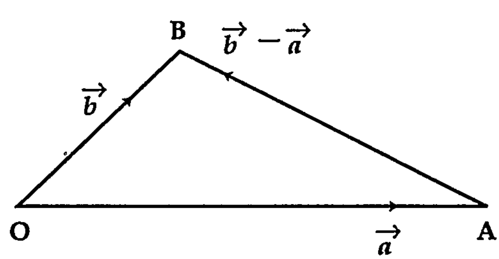
মন্তব্য ঃ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি সর্বক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

71. ভেক্টরের বিয়োগ

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ভেক্টর হলে $\vec{a} - \vec{b}$ বলতে $\vec{a} + (-\vec{b})$-কে বুঝায়।

ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি ঃ যে কোনো একটি বিন্দু O নিয়ে আমরা $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ আঁকি। তা হলে $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$.

প্রমাণ ঃ $-\vec{b} = \overrightarrow{BO}$: সুতরাং $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$
$= (-\vec{b}) + \vec{a} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$



72. ভেক্টরের যোগের এবং স্কেলার গুণিতক গঠনের মৌলিক বিধিসমূহ

ভেক্টরের যোগের এবং স্কেলার গুণিতক গঠনের মৌলিক বিধিগুলি নিচে তালিকাভুক্ত করা হলো। এখানে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ যে কোনো ভেক্টর এবং m, n যে কোনো স্কেলার।

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; (2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

(3) এমন একটি ভেক্টর অর্থাৎ 0 ভেক্টরের অস্তিত্ব আছে যার জন্য $\vec{a}+0=\vec{a}=0+\vec{a}$

(4) প্রতিটি ভেক্টর $\vec{a}$-এর একটি অনন্য বিপরীত ভেক্টর $-\vec{a}$ রয়েছে যার জন্য $\vec{a}+(-\vec{a})=0$

(5) $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$,

(6) $(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})$;

(7) $1(\vec{a})=\vec{a}$,

(8) $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$;

73. ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ (Linear combination of Vectors)

$\vec{r}$ ভেক্টরকে, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ... ... প্রভৃতি ভেক্টরগুলির যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলে যদি এরূপ কতকগুলি স্কেলার x, y, z ... ... পাওয়া যায়, যেন, $\vec{r}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+\ldots$ ... ... হয়।

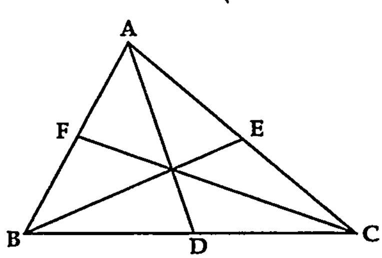
উদাহরণস্বরূপ বলা যায় $2\vec{a}+\vec{b}-4\vec{c}$, $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$ প্রভৃতি ভেক্টরগুলি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরগুলির যোগাশ্রয়ী সমাবেশ। ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ গঠন ভেক্টরের যোগ বা বিয়োগ এবং স্কেলার গুণিতক গঠনের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে।

74. সমতলীয় ভেক্টর (Coplanar vectors)

একগুচ্ছ ভেক্টরকে সমতলীয় বলা হয় যদি তাদের ধারক রেখাগুলি একই সমতলের সমান্তরাল হয়। একতলীয় সমপ্রান্তিক ভেক্টরগুলির ধারকসমূহ একই তলে অবস্থান করে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F. $\vec{BC}, \vec{AD}, \vec{BE}$ এবং $\vec{CF}$-কে $\vec{AB}$ এবং $\vec{AC}$ ভেক্টর দুইটির যোগাশ্রয়ী সমাবেশে প্রকাশ কর।



$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

$\therefore \vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$

$\vec{AD}+\vec{DC}=\vec{AC}$ ... ... (1)

$\vec{AD}+\vec{DB}=\vec{AB}$ ... ... (2)

(1) এবং (2) যোগ করে, $2\vec{AD}+(\vec{DC}+\vec{DB})=\vec{AC}+\vec{AB}$

বা, $2\vec{AD}=\vec{AC}+\vec{AB}$ [ব. বো. ২০১১]

$\therefore \vec{AD}=\frac{1}{2}(\vec{AC}+\vec{AB})$

$\vec{BE}+\vec{EA}=\vec{BA}$

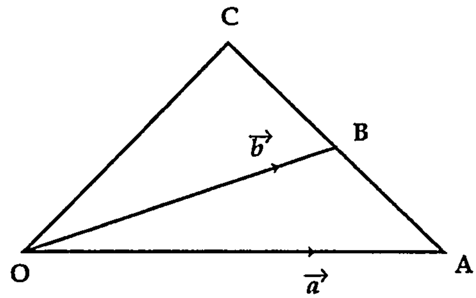
$\therefore \vec{BE}=\vec{BA}-\vec{EA}=-\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{CA}=\frac{1}{2}\vec{AC}-\vec{AB}$

$\vec{CF}+\vec{FA}=\vec{CA}$

$\therefore \vec{CF}=\vec{CA}-\vec{FA}=-\vec{AC}-\frac{1}{2}\vec{BA}=\frac{1}{2}\vec{AB}-\vec{AC}$

উদা. 2. OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্য বিন্দু B ; যদি $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$-কে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ঢা. বো. ২০০৯]

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})\\ &= \vec{a} + 2(\vec{b} - \vec{a})\\ &= \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{a}\\ &= 2\vec{b} - \vec{a}\end{aligned}$$



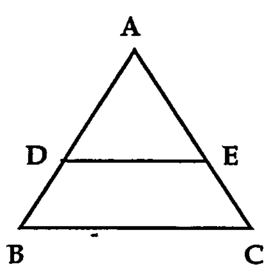
উদা. 3. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$. [রা. বো. ২০১১, ২০০৫; য. বো. ২০১১, ২০০৬; সি. বো. ২০০৯, ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৭, ২০০০; ব. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০৬, ২০০৪; কু. বো. ২০০৩, ২০০২, ২০০০]

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

উদা. 4. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক। [সি. বো. ২০১১]



$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি)

$= 2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD}$ (কেননা AC = 2AE এবং AD = 2AB)

$= 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$

$= 2\overrightarrow{DE}$ (ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি)

$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{DE}$ এই ভেক্টর সমতার তাৎপর্য দ্বিবিধ।

প্রথমত, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা সমান্তরাল (এক্ষেত্রে তারা অবশ্যই এক রেখা নয়) এবং

$|\overrightarrow{BC}| = |2\overrightarrow{DE}| = 2|\overrightarrow{DE}|$

অর্থাৎ $BC = 2DE$ বা $DE = \frac{1}{2}BC$

উদা. 5. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করে।

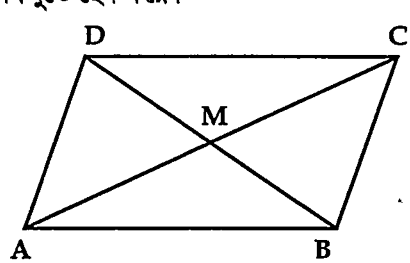
ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD. পরস্পরকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

দেখাতে হবে AM = MC এবং BM = MD.

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ ... ... (1)

এবং $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC}$ ... ... (2)



AB = DC বিধায় $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{MB}$

$\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MC}$ ভেক্টর দুইটির ধারক রেখা AC ; সুতরাং এদের বিয়োগফল ভেক্টরের ধারক রেখাও AC.

$\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{MD}$ ভেক্টর দুইটির ধারক রেখা DB ; সুতরাং এদের বিয়োগফল ভেক্টরের ধারক রেখাও DB.

$\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$ এবং $\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{MC}$ এই দুইটি সমান ভেক্টরের ধারক রেখা ভিন্ন ও পরস্পরছেদী রেখা হওয়ায় সিদ্ধান্ত হয় যে, এরা প্রত্যেকেই শূন্য ভেক্টর।

(কেননা দুইটি অশূন্য সমান ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল রেখা হতে হবে।)

সুতরাং $(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC})=0$ এবং $(\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{MB})=0$

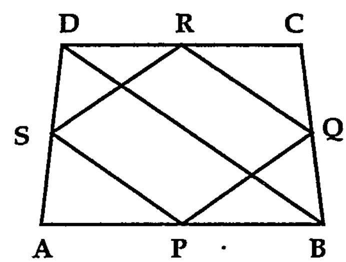
ফলে $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$

অতএব, AM = MC এবং DM = MB

সুতরাং প্রমাণিত হল যে, M বিন্দু উভয় কর্ণের মধ্যবিন্দু।

উদা. 6. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, যেকোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু ক্রমান্বয়ে সংযুক্ত করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

ABCD চতুর্ভুজের P, Q, R, S যথাক্রমে AB, DC, CD, BA বাহুর মধ্যবিন্দু। দেখাতে হবে PQRS একটি সামান্তরিক,অর্থাৎ এই চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু যুগল পরস্পর সমান্তরাল। DB সংযুক্ত করি।



ABD ত্রিভুজে উদা. 4 প্রয়োগ করে পাই,

PS || BD

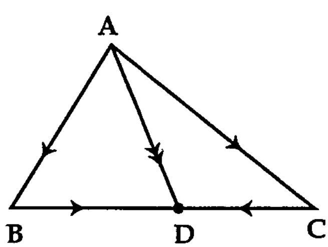
আবার CBD ত্রিভুজে উদা. 4 প্রয়োগ করে পাই,

QR || BD

অতএব, RS || QR

অনুরূপভাবে A ও C সংযুক্ত করে প্রমাণ করা যায় যে, PQ || RS,
অতএব PQRS একটি সামান্তরিক।

উদা. 7. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$. [ব. বো. ২০১১]



ABC একটি ত্রিভুজ। এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D।

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ ... ... (1)

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ ... ... (2)

(1) এবং (2) যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AD}$ ... ... (3)

কিন্তু D, BC-এর মধ্যবিন্দু বলে BD = CD ; আবার BD ও CD একই রেখায় এবং $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ পরস্পর বিপরীতমুখী। অতএব, $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=0$.

সুতরাং, (3) হতে পাই $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.

প্রশ্নমালা VA

1. ABC একটি ত্রিভুজ। যদি $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ এবং $\overrightarrow{BA}=\vec{c}$ হয়, তবে দেখাও যে $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

2. ABC একটি ত্রিভুজ ; D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু। যদি $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ এবং $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $AD=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$

3. ABCDE একটি পঞ্চভুজ; $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \vec{d}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ [কু. বো. ২০০১]

4. ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুর মধ্য বিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E ও F। $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরগুলিকে $\overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

উত্তর ঃ $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CF}$, $AD = -\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF}$

5. ABCD একটি সামান্তরিক এবং AC ও BD এর কর্ণ। $\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{BD}$-কে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। উত্তর ঃ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

6. দেয়া আছে যে, $-\vec{l} + 2\vec{m} = 2\vec{n}$; $5\vec{l} - 2\vec{m} = 3\vec{k}$; $\vec{l}, \vec{m}$-কে $\vec{n}$ এবং $\vec{k}$-এর যোগাশ্রয়ী সমাবেশে প্রকাশ কর। উত্তর ঃ $\vec{l} = \frac{2\vec{n} + 3\vec{k}}{4}, \vec{m} = \frac{10\vec{n} + 3\vec{k}}{8}$

7. E এবং F বিন্দু দুইটি ABCD চতুর্ভুজের BD ও AC কর্ণ দুইটির মধ্যবিন্দু। দেখাও যে,

(i) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{FE}$ (ii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$

8. OPQ ত্রিভুজে, $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$; PQ রেখার উপর R এমন একটি বিন্দু যেন PQ = 2QR। দেখাও যে, $\overrightarrow{PR} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})$

9. $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$ এবং $\overrightarrow{OR} = \vec{a} + \vec{b}$; OPRQ কি প্রকারের চতুর্ভুজ নির্ণয় কর। উত্তর ঃ সামান্তরিক।

10. PQR ত্রিভুজে QR, RP ও PQ বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN} = 0$ [রা. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৯; দি. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০১]

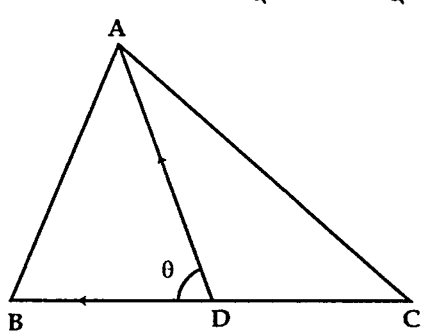
75. ভেক্টরের স্কেলার গুণন [চ. বো. ২০১১]

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজ হচ্ছে $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ যেখানে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ θ; এটি একটি স্কেলার রাশি। 0 ভেক্টর এবং যে কোনো ভেক্টরের স্কেলার গুণজ স্কেলার **0.**

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর স্কেলার গুণজ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় বলে একে ডট গুণজ (ডট প্রডাক্ট)-ও বলা হয়।

অতএব সংজ্ঞানুসারে, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$; θ হচ্ছে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ।

উদাহরণ ঃ ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$



$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = |\overrightarrow{DA}|\,|\overrightarrow{DB}|\cos\theta$

$= DA \cdot DB\cos\theta$

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DA}|\,|\overrightarrow{DC}|\cos(180° - \theta)$

$= -DA \cdot DC\cos\theta$

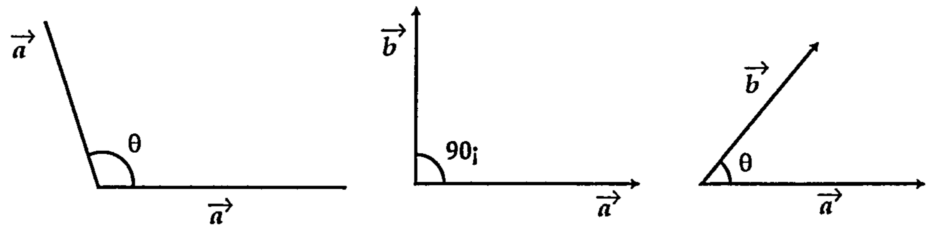
$\therefore \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = DA \cdot DB\cos\theta - DA.DC\cos\theta$

$= DA \cdot DB\cos\theta - DA \cdot DB\cos\theta$

$= 0$

76. স্কেলার গুণজের চিহ্ন

দুইটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর স্কেলার গুণজের চিহ্ন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যখন ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ সূক্ষ্মকোণ অথবা স্থূলকোণ। অন্তর্ভূত কোণ সমকোণ হলে, স্কেলার গুণজ শূন্য।



অতএব, θ সূক্ষ্মকোণ হলে, $\cos\theta > 0$ এবং $\vec{a}\,.\,\vec{b} > 0$

θ সমকোণ হলে, $\cos\theta = 0$ এবং $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$

θ স্থূলকোণ হলে, $\cos\theta < 0$ এবং $\vec{a}\,.\,\vec{b} < 0$

অতএব, দেখা যাচ্ছে, দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজ 0 হলে, দুইটি ভেক্টরের অন্তত একটি শূন্য হবে অথবা ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হবে।

∴ $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$ হলে, $\vec{a} = 0$ অথবা $\vec{b} = 0$, অথবা, $\theta = 90°$

77. দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভূত কোণ

যদি শূন্য নয় এমন দুইটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর অন্তর্গত কোণ θ হয়, তবে $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$\text{বা, } \theta = \cos^{-1}\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

78. স্কেলার গুণজের ধর্ম

(i) স্কেলার গুণন বিনিময়যোগ্য অর্থাৎ $\vec{a}\,.\,\vec{b} = \vec{b}\,.\,\vec{a}$ স্কেলার গুণনের সংজ্ঞা থেকেই এটা অনুধাবনযোগ্য।

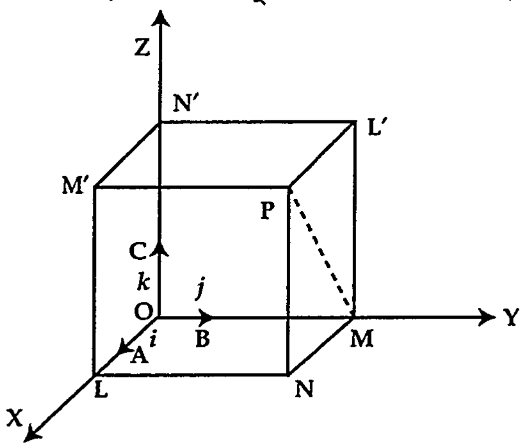
(ii) $\vec{a}\,.(-\vec{b}) = -(\vec{a}\,.\,\vec{b})$ এবং $(-\vec{a})\,.\,(-\vec{b}) = \vec{a}\,.\,\vec{b}$, যে কোনো দুইটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর জন্য।

(iii) m, n দুইটি স্কেলার এবং $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুইটি ভেক্টর হলে, $m\vec{a}\,.\,n\vec{b} = mn(\vec{a}\,.\,\vec{b})$

(iv) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ যে কোনো তিনটি ভেক্টর-এর জন্য $\vec{a}\,.\,(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{c}$ অর্থাৎ, স্কেলার গুণন বণ্টন বিধি (distributive law) মেনে চলে।

79. ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক পদ্ধতি (Three dimensional coordinate system)

O বিন্দু থেকে তিনটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা OX, OY, OZ আঁকা হলো। OX, OY এবং OZ সরলরেখার উপর যথাক্রমে A, B এবং C বিন্দু তিনটি এমনভাবে নেয়া হলো যেন,



$\overrightarrow{OA} = \hat{i}$, $\overrightarrow{OB} = \hat{j}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \hat{k}$ হয়, যেখানে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ তিনটি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টর।

মনে করি P যে কোনো একটি বিন্দু। P বিন্দুর মধ্য দিয়ে BOC, COA এবং AOB সমতলগুলির সমান্তরাল করে তিনটি তল আঁকি যারা OA, OB এবং OC-কে যথাক্রমে L, M এবং N′ বিন্দুতে ছেদ করে। এভাবে আমরা একটি আয়তাকার ঘনক পাই যার একটি কর্ণ OP.

আমরা পাই,

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ML'} + \overrightarrow{L'P}\\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{OL}\\ &= \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON'}\end{aligned}$$

আমরা এমন তিনটি স্কেলার রাশি x, y, z পেতে পারি, যেখানে

$\overrightarrow{OL} = x\overrightarrow{OA} = x\hat{i}, \overrightarrow{OM} = y\,\overrightarrow{OB} = y\hat{j}, \overrightarrow{ON'} = z\overrightarrow{OC} = z\hat{k}$

অতএব, $\vec{r} = x\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$

এখানে $\vec{r}$ ভেক্টরকে তিনটি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টরের যোগাশ্রয়ী সমাবেশ হিসেবে প্রকাশ করা হয়েছে। উল্লেখ্য যে, (x, y, z), OX, OY, OZ-অক্ষরেখাগুলির সাপেক্ষে P বিন্দুর আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক।

দ্রষ্টব্য : $\hat{i}\,.\,\hat{i} = 1, \hat{j}.\,\hat{j} = 1, \hat{k}.\,\hat{k} = 1$; $\hat{i}\,.\,\hat{j} = \hat{j}.\,\hat{i} = 0,\ \hat{j}.\,\hat{k} = \hat{k}.\,\hat{j} = 0$ এবং $\hat{k}.\,\hat{i} = \hat{i}\,.\,\hat{k} = 0.$

80. উপাংশের মাধ্যমে দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন

মনে করি, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

এবং $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \vec{a}\,.\,\vec{b} &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}).\,(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})\\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য : দুইটি ভেক্টর লম্ব হওয়ার শর্ত, $\vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$

অর্থাৎ $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

81. ভেক্টরের দৈর্ঘ্য ও দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভূত কোণ

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 &= \vec{a}\,.\,\vec{a} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}).\,(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\end{aligned}$$

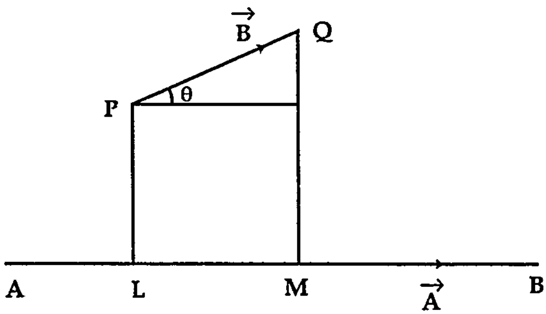
$$\therefore\quad |\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\;|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

82. ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং উপাংশ

মনে করি $\vec{B} = \vec{PQ}$ এবং AB সরলরেখাটি $\vec{A}$ ভেক্টরের ধারক রেখা। মনে করি P এবং Q থেকে অঙ্কিত লম্ব দুইটি AB সরলরেখাকে যথাক্রমে L এবং M বিন্দুতে ছেদ করে।



AB সরলরেখার উপর $\vec{B}$-এর অভিক্ষেপ = LM = $|\vec{B}|\cos\theta$

দেখা যাচ্ছে, $\vec{A}$ ভেক্টরের উপর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ = $|\vec{B}|\cos\theta$, যেখানে θ হচ্ছে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ। অতএব, দুইটি ভেক্টর $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$-এর স্কেলার গুণজ $\vec{A}.\vec{B}$ হচ্ছে ভেক্টর $\vec{A}$-এর দৈর্ঘ্য এবং এই ভেক্টরের উপর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপের গুণফল।

উপাংশ ঃ $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ একটি ভেক্টর যার দৈর্ঘ্য হচ্ছে B ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং দিক হচ্ছে $\vec{A}$ এর দিক।

$\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশের দৈর্ঘ্য = $|\vec{B}|\cos\theta$, যেখানে θ হচ্ছে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ।

$\vec{A}$ ভেক্টরের উপর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশের দৈর্ঘ্য

$$= |\vec{B}|\cos\theta$$

$$= |\vec{B}|\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}$$

$$= \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}.\vec{B} = \hat{a}.\vec{B}$$

যেখানে $\hat{a}$, $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একটি একক ভেক্টর।

সুতরাং $\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\vec{B}$-এর উপাংশ = $(\hat{a}.\vec{B})\hat{a}$

উদাহরণমালা

উদা. 1. $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ **ভেক্টর দুইটির (i) অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১০] (ii) $\vec{A}$-এর দিক বরাবর $\vec{B}$-এর উপাংশ ও অভিক্ষেপ বের কর এবং দেখাও যে এদের সাংখ্যিক মান সমান। [ঢা. বো. ২০০৯]**

(i) $\vec{A}.\vec{B} = (\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}).(6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$
$= 6 - 6 - 4 = -4$

$|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{B}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$

এখন, $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|} = \frac{-4}{21}$$

$$\cos\theta = -\frac{4}{21}$$

(ii) $\vec{A}$-এর দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}}{3}$

অতএব, $\vec{A}$-এর দিক বরাবর $\vec{B}$-এর উপাংশ $= (\vec{B}\,.\,\hat{a})\,\hat{a}$

$$= \left\{(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}).\ \frac{(\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})}{3}\right\}\hat{a}$$

$$= \left(\frac{6-6-4}{3}\right)\hat{a} = -\frac{4}{3}\hat{a}$$

অতএব, উপাংশের সাংখ্যিক মান $= -\frac{4}{3}|\hat{a}| = -\frac{4}{3}$

$\vec{A}$-এর দিক বরাবর $\vec{B}$-এর অভিক্ষেপ $= |\vec{B}|\cos\theta = 7\left(-\frac{4}{21}\right) = -\frac{4}{3}$

উদা. 2. এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব।
[য. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৮]

মনে করি ভেক্টর $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ প্রদত্ত দুইটি ভেক্টরেরই লম্ব।

$\therefore\quad a_1 - a_2 + a_3 = 0$

$\quad\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$

$\therefore\quad \dfrac{a_1}{1-2} = \dfrac{a_2}{1+1} = \dfrac{a_3}{2+1} = \lambda$

বা, $\dfrac{a_1}{-1} = \dfrac{a_2}{2} = \dfrac{a_3}{3} = \lambda$

$\therefore\quad a_1 = -\lambda,\ a_2 = 2\lambda,\ a_3 = 3\lambda$

অতএব, নির্ণেয় ভেক্টর $(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})\lambda$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \dfrac{(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})\lambda}{\sqrt{14}\,\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

উদা. 3. $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b} = \sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$; $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ বের কর।
[দি. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০৭, ২০০৩; ব. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০৬, ২০০৪; য. বো. ২০০২; রা. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০৯, ২০০২]

নির্ণেয় অভিক্ষেপ $|\vec{a}|\cos\theta$, যেখানে θ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ।

এখন,

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$|\vec{b}| = \sqrt{3+9+4} = 4$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}+3-2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}}$$

নির্ণেয় অভিক্ষেপ $|\vec{a}|\cos\theta = \sqrt{3}\dfrac{(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{4}(\sqrt{3}+1)$

উদা. 4. $\vec{B} = 2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।
[সি. বো. ২০১১, ২০০৭; কু. বো. ২০১০; দি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৯, ২০০১; রা. বো. ২০০৫]

$\vec{B}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \dfrac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{\sqrt{2^2+10^2+11^2}}$

$$= \frac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15} = \hat{b}$$

$\therefore$ $\vec{B}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A}$ ভেক্টরের উপাংশ $= \left(\vec{A}\ .\ \hat{b}\right)\hat{b}$

$$= \left\{(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}).\frac{2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}}{15}\right\}\hat{b}$$

$$= \frac{4+20-11}{15}\hat{b} = \frac{13}{15}\hat{b}$$

এবং উপাংশের মান $= \frac{13}{15}\ |\ \hat{b}\ | = \frac{13}{15}$

উদা. 5. $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে (i) $(2\vec{A} + \vec{B})$ [চ. বো. ২০০৪; য. বো. ২০০৩; কু. বো. ২০০২; মা. বো. ২০১০, ২০০৬]
(ii) $(6\vec{A} - 3\vec{B})$ [চ. বো. ২০০৪, য. বো. ২০০৩; কু. বো. ২০০২; মা. বো. ২০১০, ২০০৬] এবং
(iii) $|3\vec{A} + 2\vec{B}|$ [কু. বো. ২০০৭]-এর মান নির্ণয় কর।

(i) $2\vec{A} + \vec{B} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} = 6\hat{i} + 4\hat{j}$

(ii) $6\vec{A} - 3\vec{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 6\hat{i} + 18\hat{j} - 12\hat{k} - 12\hat{i} + 6\hat{j} - 12\hat{k}$

$= -6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$

(iii) $|3\vec{A} + 2\vec{B}| = |3(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 2(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})|$

$= |3\hat{i} + 9\hat{j} - 6\hat{k} + 8\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}|$

$= |11\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}|$

$= \sqrt{11^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

উদা. 6. $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [ব. বো. ২০১০; দি. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০৪; য. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০৭; রা. বো. ২০০৬, ২০০০; মা. বো. ২০০৩]

$\vec{A} + \vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} = 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$(\vec{A} + \vec{B}).(\vec{A} - \vec{B}) = (4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$

$= -8 + 3 + 5 = 0$

যেহেতু, ভেক্টর দুইটির ডট গুণন শূন্য অতএব তারা পরস্পর লম্ব।

উদা. 7. a-এর মান কত হলে $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে ?
[ঢা. বো. ২০১০, ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৯, ২০০৩; য. বো. ২০০৯, ২০০৫; চ. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০২, ২০০০; মা. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০৫]

দুইটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে তাদের ডট গুণন শূন্য হয়।

অতএব, $(a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

বা, $2a^2 + 2a - 4 = 0$ বা, $a^2 + a - 2 = 0$

বা, $(a+2)(a-1) = 0$ $\therefore$ $a = -2, 1$ (উত্তর)

উদা. 7. $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণনের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, $\hat{i}.\hat{j}=0$ এবং $\hat{i}.\hat{i}=1$ যেখানে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে x ও y-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর। [চ. বো. ২০১১]

১ম অংশ ঃ

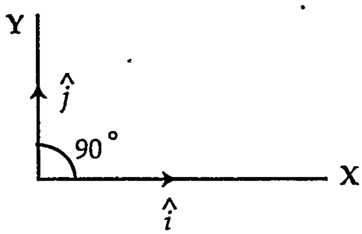
$\bar{a}$ এবং $\bar{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণন হচ্ছে $|\bar{a}|\ |\bar{b}|\cos\theta$ যেখানে $\bar{a}$ এবং $\bar{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ θ। ডট গুণফল একটি স্কেলার রাশি।

$\bar{a}$ এবং $\bar{b}$-এর ডট গুণফল $\bar{a}.\bar{b}$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং আমরা লিখি ঃ

$\bar{a}.\bar{b}=|\bar{a}|\ |\bar{b}|\cos\theta$

যেখানে θ হচ্ছে $\bar{a}$ এবং $\bar{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ।

২য় অংশ ঃ



$\hat{i}$ এবং $\hat{j}$ হচ্ছে যথাক্রমে x ও y-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর। অতএব, $\bar{i}$ ও $\bar{j}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90°।

সংজ্ঞা অনুযায়ী, $|\hat{i}|=|\hat{j}|=1.$

$\therefore\ \hat{i}.\hat{j}=|\hat{i}|\ |\hat{j}|\cos 90°=(1)(1)(0)=0.$

আবার, $\hat{i}.\hat{i}=|\hat{i}|\ |\hat{i}|\cos 0°=(1)(1)(1)=1.$

প্রশ্নমালা VB

1. $\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ হলে, ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় কর।
[সি. বো. ২০১০; দি. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৩ ; কু. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০২]
উত্তর ঃ $\cos^{-1}\left(\frac{13}{45}\right)$

2. $\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$ ও $\vec{B}=\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ হলে, ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় কর।
[রা. বো. ২০১১ (মান ভিন্ন), ২০০৪ ; [সি. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৭ ; ঢা. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০১১]
উত্তর ঃ $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}\right)$

3. $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১; কু. বো. ২০১১; চ. বো. ২০১০, ২০০৫; সি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০১] উত্তর ঃ $\frac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{i}-\hat{j}-5\hat{k})$

4. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ হলে, এমন একটি একক ভেক্টর $\vec{c}$ নির্ণয় কর যা $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরের সাথে একই তলে অবস্থান করে এবং $\vec{a}$ ভেক্টরের লম্ব। উত্তর ঃ $\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

5. ধ্রুবক a-এর মান নির্ণয় কর যেন $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\hat{i}-3\hat{j}+a\hat{k}$, এই তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে। [সি. বো. ২০১১, ২০০৩; দি. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০১০, ২০০৪; কু. বো. ২০০৯, ২০০৬; ব. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০৬] উত্তর ঃ 5

6. দুইটি ভেক্টর $\vec{A}=2\hat{i}-6\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=4\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি একক লম্ব ভেক্টর নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৬; য. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৩ ; কু. বো. ২০০৩, ২০১১ (তুলনীয়); মা. বো. ২০০২] উত্তর ঃ $\frac{1}{7}(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$

7. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} - \sqrt{6}\hat{k}$ হলে, এমন একটি একক ভেক্টর $\vec{c}$ নির্ণয় কর, যা $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর সাথে সমতলীয় হবে এবং $\vec{a}$-এর লম্ব হবে। $\vec{d}$ এমন একটি একক ভেক্টরও নির্ণয় কর যা $\vec{a}$ এবং $\vec{c}$ দুইটি ভেক্টরের লম্ব হবে। উত্তর : $\vec{c} = l(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + m(\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} - \sqrt{6}\hat{k})$, যেখানে, $3l = (\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1)\, m$ এবং $9m^2 - 3l^2 = 1$; $\vec{d} = \frac{1}{\lambda}\, [(-\sqrt{6} - \sqrt{2})\hat{i} + (1 + \sqrt{6})\hat{j} + (\sqrt{2} - 1)\hat{k}]$, যেখানে, $\lambda^2 = 18 + 2(\sqrt{12} + \sqrt{6} - \sqrt{2})$

8. $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। উত্তর : $\frac{8}{7}$
[কু. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৩; রা. বো. ২০০৭, ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০২; মা. বো. ২০১১]

9. $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১১; ব. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০৫; চ. বো. ২০০৮, ২০০৬; ঢা. বো. ২০০৭, ২০০৫, ২০০৩; সি. বো. ২০০৭; রা. বো. ২০০৬, ২০০২; কু. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০৯, ২০০৪] উত্তর : $\frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} - \frac{6}{7}\hat{k}$

10. দেখাও যে, $\vec{A} = 8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।
[রা. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০৫, ২০০২; চ. বো. ২০০৫; মা. বো. ২০০৬, ২০০৪]

11. $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ হলে, $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$-এর অভিক্ষেপ এবং $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর $\vec{b}$-এর অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৬; কু. বো. ২০০১] উত্তর : $-\frac{9}{\sqrt{14}}, -\frac{9}{\sqrt{6}}$

12. $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।
[রা. বো. ২০১১, ২০০৯; য. বো. ২০১১, ২০০৫ ; চ. বো. ২০১১, ২০০৯; ব. বো. ২০১১, ২০০৬; ঢা. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০৬, ২০০২; সি. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০০৪] উত্তর : $\hat{a}$

13. দেখাও যে, $\vec{a} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\vec{b} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পরের লম্ব।
[ব. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২]

14. দেখাও যে, $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টরগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে। [রা. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৪]

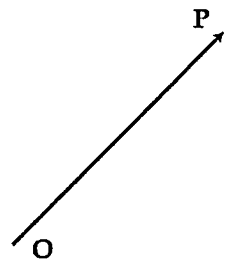
15. তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$, দেখাও যে বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। [চ. বো. ২০১০; সি. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৫]

16. $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষের সাথে যে কোণগুলি উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৫; চ. বো. ২০১১, ২০০৯; রা. বো. ২০১০, ২০০৮; কু. বো. ২০১০; য. বো. ২০১০; দি. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০৩] উত্তর : $\cos^{-1}\frac{2}{3}$, $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$, $\cos^{-1}\frac{2}{3}$

17. ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, A(1, −1, −1), B(3, 3, 1) এবং C(−1, 4, 4) বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত যার কেন্দ্র P(0, 1, 2)। [কু. বো. ২০০০]

18. $\vec{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\vec{AB}|$ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১, ২০০৯; ব. বো. ২০১০, ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৬, ২০০৪ ; রা. বো. ২০০১] উত্তর : $2\sqrt{19}$

৪৩. জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানে ভেক্টর

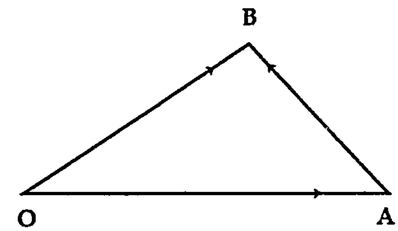


(*a*) অবস্থান ভেক্টর ঃ

O মূল বিন্দু হলে ঐ সমতলস্থিত যে কোনো বিন্দু P-এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$; ভেক্টরটি $\vec{r}$ দ্বারা সূচিত হলে $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

যে কোনো বিন্দুই মূলবিন্দু হিসেবে বিবেচিত হতে পারে। তবে, জ্যামিতিক সমস্যা সমাধানে যে বিন্দুটি মূলবিন্দু নিলে সমস্যা সমাধানে সুবিধা পাওয়া যাবে সে বিন্দুটিকেই মূলবিন্দু বিবেচনা করতে হবে।

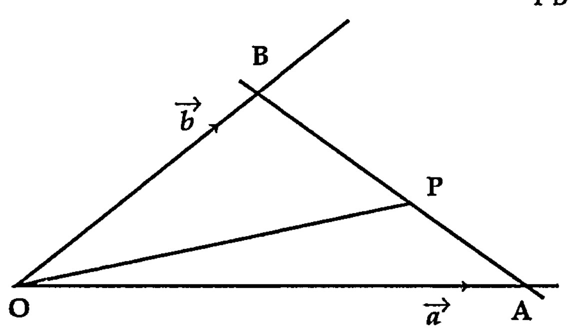
মনে করি O মূল বিন্দু এবং A ও B যে কোনো দুইটি বিন্দু। A এবং B বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$; সেক্ষেত্রে ভেক্টর $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, যেখানে $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$-এর আদি এবং প্রান্ত বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর।



(*b*) বিভক্তিকরণ সূত্র ঃ

মনে করি O মূল বিন্দু এবং $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ যথাক্রমে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর সেখানে $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

P বিন্দু AB-কে এমনভাবে অন্তর্বিভক্ত করে যেন $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$ ... ... (1)



(1) থেকে পাই, $n\,AP = m\,PB$

সুতরাং $n\,\overrightarrow{AP} = m\,\overrightarrow{PB}$

$\overrightarrow{AP}$ এবং $\overrightarrow{PB}$ ভেক্টর দুইটিকে তাদের আদি ও প্রান্ত বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টরে প্রকাশ করলে,

$$n(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$$

অথবা $(m+n)\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}$

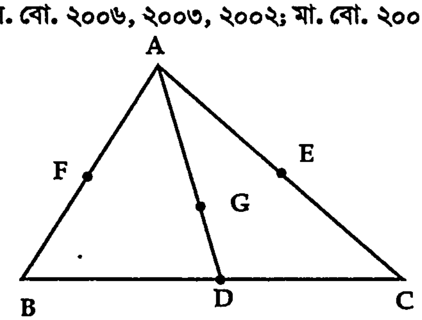
$$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OA}}{m+n} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

দ্রষ্টব্য ঃ A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ হলে AB রেখাংশের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

উদাহরণমালা

উদা. 1. দেখাও যে ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০১; কু. বো. ২০১০, ২০০৮; য. বো. ২০১০, ২০০৫, ২০০৩; ব. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০২; চ. বো. ২০০৭, ২০০৫; রা. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০১; সি. বো. ২০০৬, ২০০৩, ২০০২; যা. বো. ২০০৯]

যে কোনো বিন্দুর সাপেক্ষে মনে করি A, B, C বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; BC, CA, AB-এর মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E, F.



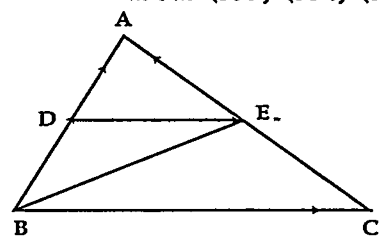
অতএব, D, E, F বিন্দুগুলির অবস্থান ভেক্টরগুলি যথাক্রমে $\dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$, $\dfrac{\vec{c} + \vec{a}}{2}$ এবং $\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

মনে করি G বিন্দু AD মধ্যমাকে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

তাহলে, G বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \dfrac{2\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+1\vec{a}}{2+1} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

এভাবে দেখান যায় যে, প্রতিটি মধ্যমা যে বিন্দুতে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তার অবস্থান ভেক্টর প্রতি ক্ষেত্রে $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$; অতএব, ঐ তিনটি বিন্দু একই বিন্দু, যা প্রতিটি মধ্যমায় অবস্থিত। অর্থাৎ মধ্যমাত্রয় ঐ বিন্দুগামী।

উদা. 2. দেখাও যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর মধ্য বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। [সি. বো. ২০১১, ২০০৪; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৬; চ. বো. ২০০৯, ২০০৩; রা. বো. ২০০৮, ২০০৪, ২০০০ ; য. বো. ২০০৮, ২০০১; ব. বো. ২০০৮, ২০০৪ ; মা. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০০]



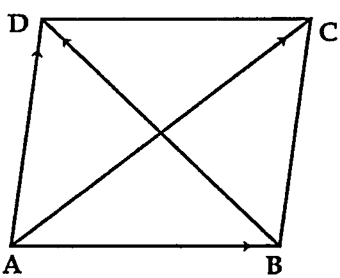
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{DE}$

এই ভেক্টর সমতার তাৎপর্য দ্বিবিধ। ভেক্টরদ্বয়ের ধারক সমান্তরাল (কেননা তাদের ধারক একই রেখা নয়) এবং এদের দৈর্ঘ্য সমান

অর্থাৎ DE ∥ BC এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

উদা. 3. দেখাও যে, রম্বসের কর্ণগুলি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। [য. বো. ২০১১; দি. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০৭, ২০০২; মা. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০৩]

মনে করি ABCD একটি রম্বস।



আমরা পাই,

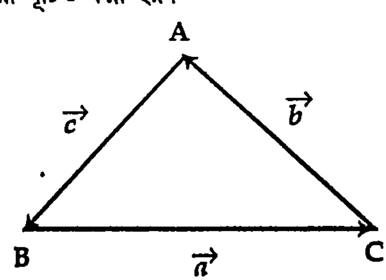
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$
$= (\overrightarrow{AD})^2 - (\overrightarrow{AB})^2$
$= (\overrightarrow{AD})^2 - (\overrightarrow{AD})^2$
$= 0$

অতএব, AC এবং BD পরস্পর লম্ব। অর্থাৎ, রম্বসের কর্ণগুলি পরস্পর লম্ব।

উদ. 4. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর ঃ যে কোনো ত্রিভুজে

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

ABC ত্রিভুজে BC, CA এবং AB বাহুর দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা সূচিত করা হয়।



ধরি, $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{CA}, \vec{c} = \overrightarrow{AB}$

তা হলে $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
$= (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = 0$

সুতরাং, $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

ফলে $(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} + \vec{b}) = (-\vec{c}).(-\vec{c})$

অথবা, $\vec{a}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} = \vec{c}.\vec{c}$

বা, $a^2 + 2ab\cos(\pi - C) + b^2 = c^2$

কেননা $\vec{b}.\vec{a} = ab\cos(\pi - C)$, যেহেতু $\vec{a}$ ও $\vec{b}$-এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\pi - C$.

অতএব, $a^2 - 2ab\cos C + b^2 = c^2$

ফলে $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$

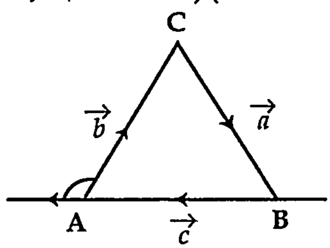
সুতরাং, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

উদ. 5. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজে ABC-তে

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. [রা. বো. ২০১০, ২০০৩; কু. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৫; মা. বো. ২০০৫]

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

বা, $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}$



বা, $\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\,\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}^2$

বা, $c^2 + b^2 + 2|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BA}|\cos(180° - A) = a^2$

বা, $c^2 + b^2 - 2bc\cos A = a^2$

বা, $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

বা, $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. (প্রমাণিত)

প্রশ্নমালা VC

1. একটি ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য সমান হলে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।
2. দেখাও যে একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলি হতে সমদূরবর্তী।
3. প্রমাণ কর যে, একটি চতুর্ভুজের মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করলে একটি সামান্তরিক পাওয়া যায়। [য. বো. ২০০৪]
4. দেখাও যে একটি ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা সমান্তরাল বাহু দুইটির সমান্তরাল এবং তাদের যোগফলের অর্ধেক।
5. প্রমাণ কর যে, কোনো সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি সমান হলে এটি একটি আয়ত।
6. প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজের বর্গ অন্য দুই বাহুর বর্গের যোগফলের সমান।
7. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।
8. দেখাও যে, কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।
9. দেখাও যে, ভেক্টর $\vec{n} = a\hat{i} + b\hat{j}$, XY-সমতলে $ax + by = c$ সরলরেখার উপর লম্ব।
10. দেখাও যে, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০৫; ব. বো. ২০০৯, ২০০৩; দি. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৮, ২০০৬, ২০০২; রা. বো. ২০০৭, ২০০৫, ২০০২; কু. বো. ২০০৭, ২০০৫, ২০০৩; য. বো. ২০০৭, ২০০২; সি. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০১১, ২০০৪]
11. প্রমাণ কর যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। [কু. বো. ২০১১; ব. বো. ২০১১; রা. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৫]
12. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ [রা. বো. ২০১১; কু. বো. ২০১০, ২০০৪; চ. বো. ২০১০; সি. বো. ২০১০, ২০০৮; দি. বো. ২০১০; য. বো. ২০০৯, ২০০২; ঢা. বো. ২০০৮]
13. প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজ ABC-তে
    (i) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ [ঢা. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০১; য. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০৩; রা. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৮, ২০০৫; কু. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০৪]
    (ii) $c = a\cos B + b\cos A$ [কু. বো. ২০১১, ২০০৮; চ. বো. ২০১১]

ক্যালকুলাস

প্রথম অধ্যায়

ফাংশন ও সীমা

FUNCTION AND LIMIT

1. সূচনা

ক্যালকুলাস (calculus) গণিত শাস্ত্রের এমন একটি শাখা যাতে পরিবর্তনশীল রাশি নিয়ে আলোচনা করা হয়। অন্তরকলনে প্রধানত ক্রমবর্ধমান বা ক্রমহ্রাসমান রাশি এবং তাদের পরিবর্তনের হার নিয়ে আলোচনা করা হয়।

দুইটি রাশির একটির সূক্ষ্মাতিসূক্ষ্ম পরিবর্তনের জন্য অন্যটির পরিবর্তন অর্থাৎ রাশি দুইটির একটির সাপেক্ষে অন্যটির পরিবর্তনের হারই অন্তরকলনের বিষয়বস্তু। সমাকলনে বক্ররেখা বেষ্টিত যে কোনো ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, ঘন বস্তুর আয়তন প্রভৃতি নির্ণয় করা হয়। এরূপ সংশ্লিষ্ট বিষয়সমূহের গবেষণা কর্মের ফলেই সপ্তদশ শতকের শেষ ভাগে ইংরেজ বিজ্ঞানী নিউটন (Newton) এবং জার্মান বিজ্ঞানী লাইবনিজ (Leibnitz) পরস্পর স্বাধীনভাবে ক্যালকুলাস আবিষ্কার করেন। তবে ক্যালকুলাসের কিছু কিছু বিষয়ে ভারতীয় গণিতবিদদের ধারণা ছিল।

2. চলরাশি অথবা চলক

কোনো গাণিতিক প্রক্রিয়ায় x যদি এমন একটি প্রতীক হয় যে, আমরা কোনো নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যার সেট থেকে যে কোনো বাস্তব সংখ্যা x-এর জন্য স্থাপন করতে পারি অর্থাৎ, x-এর মান উক্ত সেটের যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, তাহলে x-কে একটি চলরাশি বা চলক (variables) বলে। বাস্তব সংখ্যার সেটটিকে x-এর ডোমেন (domain) বলা হয়।

সাধারণত x, y, z, u, v, w অক্ষরগুলি চলকের প্রতীক হিসেবে ব্যবহার করা হয়।

3. অবিচ্ছিন্ন চলরাশি (continuous variable)

যদি x, a থেকে পর্যায়ক্রমে b পর্যন্ত সমস্ত বাস্তব সংখ্যা এর মান হিসেবে গ্রহণ করে, তবে x-কে অবিচ্ছিন্ন (continuous) চলরাশি বলে। এক্ষেত্রে x-এর ডোমেন হবে, $a \le x \le b$। যদি a-কে ডোমেন থেকে বাদ দেয়া হয়, আমরা লিখি $a < x \le b$। এক্ষেত্রে, x-এর ডোমেন বাম দিকে উন্মুক্ত এবং ডান দিকে বন্ধ। $a \le x < b$ এবং $a < x < b$ ডোমেন দুইটির মধ্যে প্রথমটি বামদিকে বন্ধ এবং ডানদিকে খোলা কিন্তু দ্বিতীয় ডোমেনটি দুই দিকেই খোলা।

$\sqrt{(5-x)(x+3)}$ রাশিমালায় x-একটি অবিচ্ছিন্ন চলক যার ডোমেন $-3 \le x \le 5$.

4. ধ্রুবক (constant)

যে প্রতীক কোনো গাণিতিক প্রক্রিয়ায় একই মানে অবস্থান করে অর্থাৎ এর মানের কোনো পরিবর্তন হয় না তাকে ধ্রুবক রাশি অথবা ধ্রুবক (constants) বলে। $2, 3, -4, \pi, e$ এগুলি ধ্রুবক। ধ্রুবককে সাধারণত বর্ণমালার গোড়ার দিকের অক্ষর a, b, c প্রভৃতি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

5. পরম মান (absolute value)

x-এর পরম মান (absolute value) বলতে আমরা ধনাত্মক চিহ্নসহ x-এর সাংখ্যিক মানকেই বুঝি এবং এটি $|x|$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অতএব, $x >, =$ অথবা < 0 হলে $|x|$-এর মান হবে $x, 0$ অথবা $-x$. আবার $|x-a| < \delta$ হলে, যদি $x > a$ হয়, তবে $x - a < \delta$ অর্থাৎ, $x < a + \delta$. যদি $x < a$ হয় তবে, $a - x < \delta$, অর্থাৎ $a - \delta < x$; অসমতা দুইটিকে একত্রিত করে পাই, $a - \delta < x < a + \delta$.

অতএব, $|x-a| < \delta$ এর অর্থ, $a - \delta < x < a + \delta$

অনুরূপভাবে, $|x-a| \le \delta$ এর অর্থ, $a - \delta \le x \le a + \delta$

6. ফাংশন (Functions) [রা. বো. ২০১১]

মনে করি A এবং B দুইটি সেট। যদি A সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটের একটি নির্দিষ্ট উপাদানের সাথে সম্পর্কযুক্ত হয়, তবে এ সম্পর্ককে A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন বলে এবং আমরা লিখি $f : A \to B$. এটিকে পড়া হয়, f হচ্ছে A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন। A সেটকে বলা হয় ফাংশনের ডোমেন (domain)। B কে বলা হয় ফাংশনের কোডোমেন (codomain)। যদি A সেটের a উপাদানটি B সেটের একটি উপাদান b-এর সাথে সংশ্লিষ্ট হয় তবে b-কে a-এর ছবি (image) বলে এবং $b = f(a)$ লেখা হয়। B সেটের যে উপাদানগুলি A সেটের উপাদানসমূহের ছবি তাদের সেটকে ফাংশনের রেঞ্জ (range) বলে।

অতএব, ডোমেন $f = A$ এবং রেঞ্জ $f \subseteq B$.

7. ফাংশনের উদাহরণ

ফাংশনের সংজ্ঞা থেকে দেখা যাচ্ছে A সেট থেকে একটি উপাদান বাছাই করার সাথে সাথে B সেট থেকে একটি উপাদান পাওয়া যায়। A এবং B সেটের উপাদানগুলিকে যদি চলরাশি ধরা হয়, তবে ফাংশনের রেঞ্জে অন্তর্ভুক্ত B সেটের চলরাশিগুলির মান A সেটের চলরাশিগুলির মানের উপর নির্ভরশীল।

(i) ধরা যাক, R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং ফাংশন f প্রতিটি বাস্তব সংখ্যাকে এর বর্গের সাথে সংশ্লিষ্ট করে। তবে, $f : R \to R$

ফাংশনটি হচ্ছে $f(x) = x^2$.

এখানে ফাংশন f-এর ডোমেন সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট কিন্তু রেঞ্জ কেবলমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় $f(-3) = 9, f(3) = 9, f(2) = 4, f(-2) = 4$.

(ii) $x^2 + y^2 = 1$ একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ। এখানে, $y^2 = 1 - x^2$

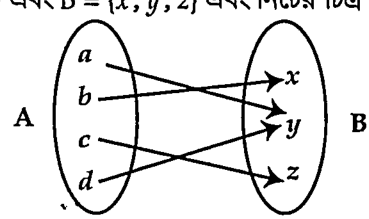
বা, $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

অর্থাৎ, $y = \sqrt{1-x^2}$ এবং $y = -\sqrt{1-x^2}$। x-অক্ষের উপরিস্থিত অর্ধবৃত্তের জন্য $y \geq 0$ এবং $y = \sqrt{1-x^2}$ বা, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. x-অক্ষের নিচের অর্ধবৃত্তের জন্য, $y \leq 0$ এবং $y = f(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

অতএব, f এরূপ ক্ষেত্রে দুইটি ফাংশন সংজ্ঞায়িত করে। $f(x) = \sqrt{1-x^2}$-এর ডোমেন $x = 1$ থেকে $x = -1$-এর অন্তর্গত প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা অর্থাৎ, $-1 \leq x \leq 1$; কিন্তু f-এর রেঞ্জ, $0 \leq f(x) \leq 1$

$f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ ফাংশনের ডোমেন একই কিন্তু রেঞ্জ $-1 \leq f(x) \leq 0$

(iii) মনে করি $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{x, y, z\}$ এবং নিচের চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$



এখানে f-এর ডোমেন $A = \{a, b, c, d\}$ এবং রেঞ্জ $\{x, y, z\}$ এবং $f(a) = y, f(b) = x, f(c) = z, f(d) = y$

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ফাংশনের ডোমেন 0 ব্যতীত সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

স্বাধীন ও অধীন চলরাশি ঃ

$y = f(x)$ ফাংশনে চলরাশি x-কে স্বাধীন চলরাশি বলে এবং y-এর মান যেহেতু x-এর মানের উপর নির্ভরশীল, সেহেতু y-কে অধীন চলরাশি বলা হয়।

8. ফাংশন সম্পর্কে কতিপয় মন্তব্য

(i) গাণিতিক ফর্মূলার সাহায্যে কোনো ফাংশন প্রকাশ করা সম্ভব নাও হতে পারে। মনে করি দুপুরের x ঘণ্টা পর কোনো রোগীর গায়ের উত্তাপ T ডিগ্রী। x-এর প্রতিটি মানের জন্য আমরা T-এর একটি মান পাই। অতএব, সংজ্ঞানুসারে, T হচ্ছে x-এর ফাংশন। এক্ষেত্রে, T-কে x-এর মাধ্যমে কোনো গাণিতিক ফর্মূলার সাহায্যে প্রকাশ করা যায় না। অবশ্য, x-কে স্বাধীন এবং T-কে অধীন চলরাশি ধরে আমরা লেখচিত্র আঁকতে পারি, যা থেকে সময়ের সাথে উত্তাপের কিভাবে পরিবর্তন হয় তা লক্ষ করা যায়।

(ii) একটি ফাংশন তার ডোমেনের বিভিন্ন (পরস্পর নিচ্ছেদ) উপসেটে বিভিন্ন সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত হতে পারে। যেমন;

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{যখন } x<0 \\ 3 & \text{যখন } x=0 \\ \frac{1}{2}-x & \text{যখন } x>0 \end{cases}$$

এখানে ফাংশনটি x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।

9. ফাংশনের প্রতীক (Functional notation)

ফাংশনকে সাধারণত $f(x)$, $F(x)$ বা $\varphi(x)$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়ে থাকে।

যদি $f(x)=x^2-5x+4$ হয়, তবে $f(1)$, ফাংশনের সংখ্যাবাচক মান বুঝায় যখন x-এর পরিবর্তে 1 স্থাপন করা হয়।

এইরূপে,
$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2-(5\times1)+4=0 \\ f(0) &= 0-0+4=4 \\ f(3) &= 3^2-(5\times3)+4=-2 \\ f(a) &= a^2-5a+4 \\ f(a+h) &= (a+h)^2-5(a+h)+4 \end{aligned}$$

আবার, যদি $\varphi(\theta)=2\cos\theta$ হয়, তা হলে
$$\begin{aligned} \varphi(0^\circ) &= 2\cos 0^\circ=2 \\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\cos\frac{\pi}{2}=0 \\ \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1 \end{aligned}$$

x-এর ডোমেনের মধ্যস্থিত x-এর কোনো মানের জন্য $f(x)$-এর কোনো মান পাওয়া না গেলে x-এর ঐ মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে না। যেমন $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ ফাংশনটি $x=5$ বিন্দুতে অসংজ্ঞায়িত (undefined)।

উদাহরণমালা

উদা. 1. $f(x)=2^x$ **হলে দেখাও যে,**

(a) $f(x+3)-f(x-1)=\frac{15}{2}f(x)$

(b) $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)}=f(4)$

(a) $f(x+3)-f(x-1)=2^{x+3}-2^{x-1}=2^x.2^3-2^x.2^{-1}=2^x\left(2^3-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}2^x=\frac{15}{2}f(x)$

(b) $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)}=\dfrac{2^{x+3}}{2^{x-1}}=2^4=f(4)$

উদা. 2. যদি $f(x) = x^2 - x$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(x+1) = f(-x)$

$f(x) = x^2 - x$

$\therefore \quad f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1)$

$= x^2 + 2x + 1 - x - 1 = x^2 + x$

$= (-x)^2 - (-x) = f(-x)$

উদা. 3. যদি $y = f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = f(y)$ [ঢা. বো. ২০১১]

$y = \dfrac{5x+3}{4x-5}$ বা, $4xy - 5y = 5x + 3$

বা, $4xy - 5x = 5y + 3$ বা, $x(4y-5) = 5y + 3$

$\therefore \quad x = \dfrac{5y+3}{4y-5} = f(y).$

উদা. 4. নিচের ফাংশনগুলির ডোমেন নির্ণয় কর ঃ

(i) $y = \sqrt{4 - x^2}$ (ii) $y = x^2 + 4$ (iii) $\sqrt{x^2 - 25}$

(iv) $y = \dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$ (v) $\dfrac{x}{x^2+16}$

(i) y-এর বাস্তব মানের জন্য, $4 - x^2 \geq 0$ অথবা, $x^2 \leq 4$

অতএব, নির্ণেয় ডোমেন, $-2 \leq x \leq 2$

(ii) $y = x^2 + 4$, x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য y বাস্তব।

অতএব, প্রদত্ত ফাশনের ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

(iii) ফাংশনটির বাস্তব মানের জন্য $x^2 - 25 \geq 0$ অথবা, $x^2 \geq 25$ অর্থাৎ $x \geq 5$ অথবা $x \leq -5$

(iv) $x = 2$ অথবা -1 হলে, y-এর কোনো মান পাওয়া যায় না। অতএব, $x = 2, x = -1$ ছাড়া সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট হচ্ছে নির্ণেয় ডোমেন।

(v) যেহেতু, x-এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য x^2+16 সব সময়ই ধনাত্মক, অতএব সকল বাস্তব সংখ্যার সেট ফাংশনটির ডোমেন।

উদা. 5. $f(x) = \ln x$ হলে, দেখাও যে,

(i) $f(ab) = f(a) + f(b)$, (ii) $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = -f(a)$

(i) $f(ab) = \ln ab = \ln a + \ln b = f(a) + f(b)$

(ii) $f\left(\dfrac{1}{a}\right) = \ln \dfrac{1}{a} = \ln 1 + \ln a = -\ln a = -f(a)$

উদা. 6. $f(x) = \sec x + \cos x$ হলে, দেখাও যে, $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = \sec(-x) + \cos(-x)$

$= \sec x + \cos x = f(x)$

উদা. 7. যদি $f(x) = \ln(x)$ এবং $\phi(x) = x^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $f\{\phi(x)\} = 3f(x)$ [ব. বো. ২০০২]

$f(x) = \ln x$

$\therefore \quad f\{\phi(x)\} = \ln\{\phi(x)\} = \ln x^3 = 3\ln x = 3f(x)$

উদা. 8. $f(x) = \sin x$ হলে, দেখাও যে, $f(2x) = 2f(x)\sqrt{1-\{f(x)\}^2}$

$f(x) = \sin x$

$\therefore f(2x) = \sin 2x = 2\sin x \cos x$

$= 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x} = 2f(x)\sqrt{1-\{f(x)\}^2}$

উদা. 9. যদি $f(x) = b\dfrac{x-a}{b-a} + a\dfrac{x-b}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(a) + f(b) = f(a+b)$

[রা. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৮, ২০০১; ঢা. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০০৭]

$f(a) = \dfrac{b\,(a-a)}{b-a} + \dfrac{a(a-b)}{a-b} = a$

$f(b) = \dfrac{b(b-a)}{b-a} + \dfrac{a\,(b-b)}{a-b} = b$

এবং $f(a+b) = b\dfrac{(a+b-a)}{b-a} + a\dfrac{(a+b-b)}{a-b}$

$= \dfrac{b^2}{b-a} + \dfrac{a^2}{a-b}$

$= \dfrac{a^2}{a-b} - \dfrac{b^2}{a-b} = \dfrac{a^2-b^2}{a-b}$

$= a + b = f(a) + f(b)$

প্রশ্নমালা I A

1. যদি $f(x) = \dfrac{3x+4}{x-5}$ হয়, তাহলে $f(3), f\left(\dfrac{1}{3}\right), f(0)$-এর মান নির্ণয় কর। ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর।

2. $f(\theta) = \sin\theta$ হলে, $f(0),\ f\left(\dfrac{\pi}{6}\right), f\left(\dfrac{\pi}{4}\right), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$-এর মান নির্ণয় কর। ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

3. নিচের ফাংশনগুলির ডোমেন নির্ণয় কর ঃ

(i) $y = \sqrt{x^2-9}$, (ii) $y = \sqrt{16-x^2}$, (iii) $y = \dfrac{x}{16x^2+1}$

(iv) $y = \dfrac{6x}{(x-4)\,(x+2)}$, (v) $y = \dfrac{x}{x+3}$

4. যদি $f(x) = \dfrac{1}{x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(a) - f(b) = f\left(\dfrac{ab}{b-a}\right)$ [চ. বো. ২০০০]

5. যদি $f(x) = \dfrac{1}{x}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $f(x+h) - f(x) = -\dfrac{h}{x^2+xh}$

6. $f(x) = e^x + e^{-x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(x+y)\,f(x-y) = f(2x) + f(2y)$ [রা. বো. ২০১০, ২০০৫; কু. বো. ২০১০, ২০০৪; চ. বো. ২০০৯, ২০০৬, ২০০৩; ব. বো. ২০০৯, ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৭, ২০০৪]

7. $\phi(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\,\phi(y)} = \dfrac{x-y}{1+xy}$

[সি. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০২; রা. বো. ২০০০]

8. $f(\theta) = \cos\theta - \sin\theta$ হলে, θ-এর কোন্ মানের জন্য $f(\theta) = 0$ হবে ?

9. যদি $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$ [য. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০০]

10. $f(x) = \sin x$ হলে, দেখাও যে,
$f(x) = f(x+2\pi) = f(x+4\pi) = f(x+6\pi) = \cdots\cdots$
[$\sin x$ একটি পর্যায়ী (periodic) ফাংশন এবং এর পর্যায় 2π]

11. যদি $f(x) = \cos x$ হয় তবে দেখাও যে, (i) $f(2x) = 2\{f(x)\}^2 - 1$,
(ii) $f(3x) = 4\{f(x)\}^3 - 3f(x)$. [ঢা. বো. ২০০১]

12. যদি $y = f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-4}$ হয় তাহলে দেখাও যে, $f(y) = x$, অথবা, $f^{-1}(x) = f(x)$
[ব. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০৪; সি. বো. ২০০৯; দি. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৮, ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৬; রা. বো. ২০০৪, ২০০২ ; ব. বো. ২০০৭, ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০২, ২০০০; মা. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৫, ২০০২, ২০০০]

13. যদি $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$ হয়, তাহলে $f(y)$-এর মান x -এর মাধ্যমে নির্ণয় কর।
[য. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০১; সি. বো. ২০০১]

14. যদি $f(x) = x + x^{-1}$ হয়, তাহলে, প্রমাণ কর যে, $\{f(x)\}^2 = 2 + f(x^2)$

15. যদি $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{x(1-x)}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(1-x)$

16. $f(y) = \dfrac{1 + y^2 + y^4}{y^2}$ হলে, দেখাও যে, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$. [রা. বো. ২০০৬; মা. বো. ২০০৩]

17. $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ হলে, $f\left(\dfrac{p}{q}\right) \div f\left(\dfrac{q}{p}\right)$-এর মান নির্ণয় কর।

18. $f(x) = \sin x \cos^3 x$ হলে, দেখাও যে, $f(\pi + x) = f(x)$

19. যদি $f(x) = \dfrac{x-a}{x} + \dfrac{x}{x-b}$ হয়, তবে $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$-এর মান নির্ণয় কর।

20. যদি $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে $f(\cos\theta) = \tan^2\dfrac{\theta}{2}$
[কু. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০১০]

21. যদি $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$ [দি. বো. ২০১০]

22. যদি $\phi(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $\phi(y) + \phi(z) = \phi\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)$
[কু. বো. ২০১১, ২০০৩; চ. বো. ২০১০, ২০০১; য. বো. ২০০৬, ২০০১; ঢা. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০০৮]

23. $f(x) = \ln(\sin x)$ এবং $\phi(x) = \ln(\cos x)$ হলে, দেখাও যে, $e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$
[ঢা. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০৩; য. বো. ২০১০, ২০০৩, ২০০০; সি. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০২; রা. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৬; কু. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০২; মা. বো. ২০০৬, ২০০৪]

24. $f(x) = \ln(\sin x)$ হলে, দেখাও যে, $e^{2f(x)} = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ [মা. বো. ২০০১]

25. $f(x) = x^2$ হলে, দেখাও যে, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h$

26. $\phi(x) = \tan x$ হলে, দেখাও যে, $\phi(a-b) = \dfrac{\phi(a) - \phi(b)}{1 + \phi(a)\,\phi(b)}$ [সি. বো. ২০০৩]

27. যদি $f(x) = (x-2)(8-x)$ হয়, যেখানে $2 \le x \le 8$ তাহলে,
(i) $f(6)$ এবং $f(-1)$-এর মান নির্ণয় কর। $f(x)$-এর ডোমেন নির্ণয় কর।
(ii) $f(1-2t)$-এর মান নির্ণয় কর। এর ডোমেনও বের কর।
(iii) $f\{f(3)\}$ এবং $f\{f(5)\}$ নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. $f(3)=-\frac{13}{2}, f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{15}{14}, \quad f(0)=-\frac{4}{5}$; সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট, যেখানে $x\neq 5$.

2. $f(0)=0, f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}, \ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যা এবং রেঞ্জ -1 থেকে 1.

3. (i) $-3\geq x\geq 3$ (ii) $-4\leq x\leq 4$

(iii) যেহেতু, x-এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য $16x^2+1\neq 0$, x-এর সমস্ত বাস্তব মান ফাংশনটির ডোমেন।

(iv) $x\neq 4$, $x\neq -2$, (v) $x\neq -3$.

8. $\theta=\frac{\pi}{4}$ 13. $f(y)=x$ 17. $\frac{p}{q}$ 19. $\frac{4ab}{a^2-b^2}$

27. (i) $f(6)=8$, $f(-1)$ অসংজ্ঞায়িত, কেননা -1, ডোমেন $2\leq x\leq 8$-এর মধ্যে নেই। $f(x)$-এর ডোমেন $2\leq x\leq 8$.

(ii) $f(1-2t)=-(2t+1)(2t+7)$, $-\frac{7}{2}\leq t\leq -\frac{1}{2}$

(iii) $f\{f(3)\}=9$, $f\{f(5)\}=f(9)$ অসংজ্ঞায়িত, যেহেতু $2\leq x\leq 8$.

10. ফাংশনের সীমা (Limit of a Function) [কু. বো. ২০০১; চ. বো. ২০০১]

চলমান রাশি x-এর মান একটি ধ্রুবক a-এর প্রায় সমান বা অত্যন্ত নিকটবর্তী বলতে আমরা বুঝি x-এর মান ক্রমশ a-এর দিকে অগ্রসর হয়ে এমন পর্যায়ে উপনীত হয় যে x-এর মান এবং a-এর পার্থক্য অর্থাৎ, $|x-a|$ যে কোনো ক্ষুদ্র সংখ্যা থেকে ক্ষুদ্রতর হয়। তখন x-এর মান $x\to a$ সংকেতের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় এবং a-কে বলা হয় x-এর সীমান্ত মান বা সীমা।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক চলমান রাশি x-এর মানগুলি ক্রমান্বয়ে 1·9, 1·99, 1·999 ... ... অথবা 2·1, 2·01, 2·001 ... ... । উভয় ক্ষেত্রেই x-এর সীমান্ত মান বা সীমা 2 ; অর্থাৎ $x\to 2$। প্রথম ক্ষেত্রে 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর থেকে বা বাম দিক থেকে x-এর মান 2-এর নিকটবর্তী হয়। এটি প্রকাশ করা হয় $x\to 2^-$ সংকেতের সাহায্যে। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে x-এর মান 2 অপেক্ষা বৃহত্তর থেকে অথবা ডানদিক থেকে 2-এর নিকটবর্তী হয় এবং এটি প্রকাশ করা হয় $x\to 2^+$ সংকেত দ্বারা।

মনে করি, $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ একটি ফাংশন। x-এর ক্রমিক মানগুলি বসিয়ে $f(x)$-এর মানগুলি যথাক্রমে,

$x=1·9, \quad f(x)=3·9$

$x=1·99, \quad f(x)=3·99$

$x=1·999, \quad f(x)=3·999$

আবার,

$x=2·1, \quad f(x)=4·1$

$x=2·01, \quad f(x)=4·01$

$x=2·001, \quad f(x)=4·001$

চলমান রাশি, $x \to 2^+$ অথবা, $x \to 2^-$ হলে উভয় ক্ষেত্রেই $f(x) \to 4$ হয়। অতএব, আমরা বলতে পারি চলমান রাশি x বাম দিক অথবা ডান দিক, যেদিক থেকেই হোক না কেন $\to 2$ হলে, $f(x) \to 4$ হয়। 4-কে এক্ষেত্রে ফাংশন $f(x)$-এর সীমা বলা হয়, যখন $x \to 2$.

সংজ্ঞা : চলমান রাশি x-এর মান উভয় দিক হতে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a-এর দিকে অগ্রসর হয়ে a-এর সন্নিকটবর্তী হওয়ায় যদি ফাংশন $f(x)$, একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l-এর যথেচ্ছ সন্নিকটবর্তী হয়, তাহলে l-কে $f(x)$ ফাংশনের সীমা বলা হয়। একে $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$-কে ডান সীমা এবং $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$-কে বাম সীমা বলে। উপরের উদাহরণ থেকে আমরা দেখি যে $x \to a$ হলে সীমা অস্তিত্বশীল হবে, যদি এবং কেবল যদি $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ হয়।

11. একদিকবর্তী সীমা (Onesided limit)

আমরা, $f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনটি বিবেচনা করি। এখানে $f(x)$-কে কেবলমাত্র 0-এর ডান দিকের সংখ্যাগুলির জন্য সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে।

সুতরাং এক্ষেত্রে $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

এখানে $\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x}$-এর অস্তিত্ব নেই কেননা $f(x) = \sqrt{x}$, $x < 0$-এর জন্য সংজ্ঞায়িত নয়।

ফাংশনের এরূপ সীমাকে একদিকবর্তী সীমা বলা হয়।

12. সীমার কড়াকড়ি (rigorous) সংজ্ঞা

ধরা যাক, $f(x) = 3x + 4$ একটি ফাংশন। $x \to 1^-$ হলে, মনে করি, x-এর ক্রমিক মানগুলি ˙9, ˙99, ˙999, ... অথবা, $x \to 1^+$ হলে, x-এর ক্রমিক মানগুলি 1˙1, 1˙01, 1˙001, ..., ... ।
$f(x) = 3x + 4$ ফাংশনে x-এর মানগুলি পর্যায়ক্রমে স্থাপন করলে, $f(x)$-এর মানগুলি যথাক্রমে 6˙7, 6˙97, 6˙997, ... অথবা, 7˙3, 7˙03, 7˙003, ... পাওয়া যায়। স্পষ্টতই,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 7$$

অতএব, $|x - 1| = {}^{\cdot}1$ হলে, $|f(x) - 7| = {}^{\cdot}3$

$|x - 1| = {}^{\cdot}01$ হলে, $|f(x) - 7| = {}^{\cdot}03$

$|x - 1| = {}^{\cdot}001$ হলে, $|f(x) - 7| = {}^{\cdot}003$

এভাবে x-এর মান এবং 1-এর পার্থক্য যতই কমতে থাকবে ততই $f(x)$ এবং 7-এর মানের ব্যবধান কমতে থাকবে। এরূপ অবস্থায় $|f(x) - 7| < \epsilon$ ধরলে, যেখানে ϵ পূর্ব নির্ধারিত একটি ধনাত্মক ক্ষুদ্র রাশি,

আমরা পাই, $|3x + 4 - 7| < \epsilon$

অথবা, $|3x - 3| < \epsilon$

অথবা, $|x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$

অথবা, $|x - 1| < \delta$, যেখানে $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, অতএব দেখা যাচ্ছে $|x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{3}$ হলে $|f(x) - 7| < \epsilon$ হবে।

উপরের উদাহরণ থেকে সীমার সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে সুস্পস্ট করা যায় : পূর্ব নির্ধারিত যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ϵ-এর জন্য, যদি ϵ-এর উপর নির্ভরশীল আর একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যায় যেন $|x - a| < \delta$ হলে সর্বদা

$|f(x) - l| < \in$ হয় তবে l-কে $f(x)$-এর সীমা বলা হয় যখন $x \to a$ এবং একে $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

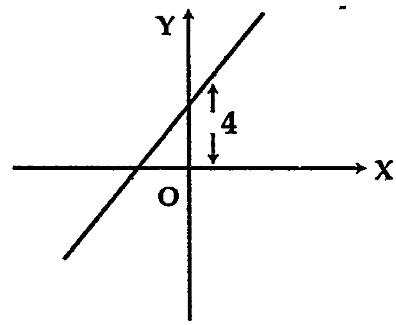
$f(x)$ ফাংশনে x-এর মান a লিখলে যে মান পাওয়া যায় তাকে $f(a)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অপর পক্ষে $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ দ্বারা $f(x)$-এর সীমা বোঝানো হয়। বস্তুত $\lim\limits_{x \to a} f(x)$-এর মান এবং $f(a)$-এর মান, দুইটি পৃথক সত্তা। তবে অনেক ক্ষেত্রেই $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ হয়ে থাকে। এমতাবস্থায় ফাংশনটিকে a বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন (continuous) বলা হয়।

উল্লেখ্য কোনো বিন্দু $x = a$ তে $f(a)$ নির্ণয় করা সম্ভব না হলেও $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ অস্তিত্বশীল হতে পারে।

13. অবিচ্ছিন্ন ফাংশন (Continuous function)

(i) $f(x) = 3x + 4$ ফাংশনটি বিবেচনা করি। ফাংশনটির ডোমেন সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট। এর লেখ, $y = 3x + 4$ সমীকরণের লেখ।

লেখচিত্রটি দেয়া হলো।



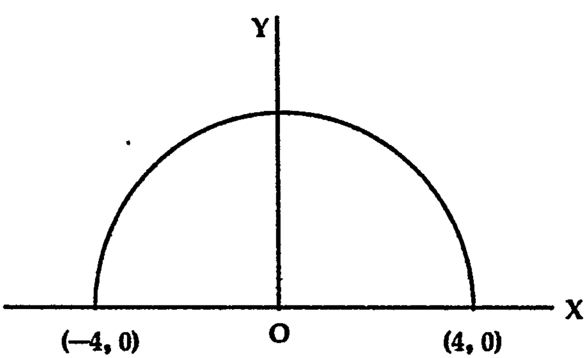
দেখা যাচ্ছে লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা। সরলরেখাটির কোথাও কোনো ছেদ নেই। কোনো ফাংশনের লেখচিত্রে কোথাও ছেদ বা বিচ্ছিন্নতা না থাকলে ফাংশনটিকে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বলে।

ফাংশনটির ডোমেন সমস্ত বাস্তব সংখ্যা, আমরা $x \to 4$ হলে ফাংশনটির সীমা নির্ণয় করি।

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = 16$$

আবার, $f(4) = 16$

অতএব, আমরা পাই, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$; স্পষ্টতই, $(4, 16)$ বিন্দুটি ফাংশনটির লেখের উপর অবস্থিত এবং ফাংশনটি এই বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন। এভাবে, দেখান যায় যে, x-এর যে কোনো বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।



(ii) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

বা, $y = \sqrt{16 - x^2}$.

$y = \sqrt{16 - x^2}$, $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের x-অক্ষের উপরের অর্ধাংশ নির্দেশ করে। ফাংশনটির ডোমেন বন্ধ ব্যবধি $-4 \leq x \leq 4$.

এই ব্যবধির মধ্যে $x \to 2$ হলে ফাংশনটির সীমা

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{16 - x^2}$$
$$= \lim_{x \to 2^-} \sqrt{16 - x^2} = 2\sqrt{3}$$

এবং $f(2) = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$

অতএব, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$, ফাংশনটি $x = 2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

এভাবে দেখান যায় যে, $-4 \le x \le 4$ ব্যবধির মধ্যে x-এর যে কোনো মানের জন্য ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। ফাংশনটির লেখ একটি অবিচ্ছিন্ন বক্ররেখা এবং এর কোথাও ছেদ নেই।

উপরের উদাহরণ দুইটি থেকে দেখা যাচ্ছে যে, কোনো ফাংশন $f(x)$ যদি একটি ব্যবধির মধ্যে সংজ্ঞায়িত হয় এবং $x = a$ যদি এই ব্যবধির মধ্যে থাকে, তবে $x = a$-তে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হবে, যদি $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ হয়। এই শর্তের যে কোনো একটি পূরণ না হলে ফাংশনটি ঐ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন হবে।

14. সীমার মৌলিক ধর্মাবলি

যদি $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ এবং $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = m$ হয়, তবে

(i) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) \pm \phi(x)\} = l \pm m$

(ii) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x).\ \phi(x)\} = lm$

(iii) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{\phi(x)} = \dfrac{1}{m}$ যদি $m \ne 0$ হয়

(iv) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\phi(x)} = \dfrac{l}{m}$ যদি $m \ne 0$ হয়।

15. অসীম সীমা (Infinitive limits)

যখন $x \to a$ হয়, তখন $f(x)$, যদি একটি বড় সংখ্যা, যা যে কোনো বড় সংখ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর-এর সন্নিকটবর্তী হয়, তখন আমরা লিখি, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ অনুরূপ অর্থ বহন করে।

উদাহরণ. (i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$ (ii) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{(x-3)^2} = -\infty$

আবার, $x \to \infty$ হলে, $f(x)$-এর সীমা একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা l হতে পারে। সেক্ষেত্রে আমরা পাই,

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$; যেমন, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 3.$

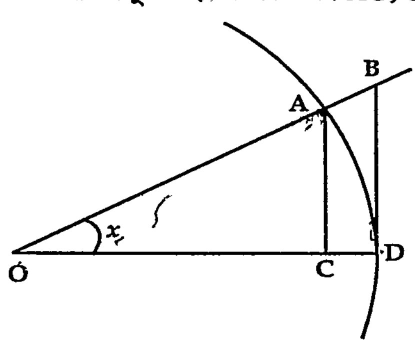
16. প্রমাণ করতে হবে যে,

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ [কু. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০২]

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ [রা. বো. ২০০৮]

(i) O কেন্দ্র এবং OA = OD = 1 ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত চাপ আঁকি। D বিন্দুতে DB লম্ব আঁকি যা OA-বর্ধিতকে B বিন্দুতে ছেদ করে। এখন AC, OD-এর উপর লম্ব আঁকি। মনে করি $\angle AOC = x$ রেডিয়ান



চিত্র থেকে পাই,

OAC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল < OAD-এর ক্ষেত্রফল < OBD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

বা, $\frac{1}{2}\sin x \cos x < \frac{1}{2}.\ 1^2.\ x < \frac{1}{2}\tan x$

$\frac{1}{2}\sin x$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\cos x < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$

$\Rightarrow \cos x < \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}$

যখন, $x \to 0, \cos x \to 1$, এবং আমরা পাই, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + x\text{-এর উচ্চতর ঘাত সংবলিত পদ}\right)$$

$$= 1$$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots + x\text{-এর উচ্চতর ঘাত সংবলিত পদ}\right)$$

$$= 1$$

উদাহরণমালা

উদা. 1. n-এর মূলদ মানের জন্য প্রমাণ কর যে,

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

মনে করি, $x = a + h$, অতএব যখন $x \to a, h \to 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{a + h - a} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^n \left(1 + \frac{h}{a}\right)^n - a^n}{h}$$

যেহেতু $h \to 0$, সুতরাং h-কে a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধরা যায় এবং $\dfrac{h}{a}$-এর সাংখ্যিক মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। অতএব, $\left(1 + \dfrac{h}{a}\right)^n$-কে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তৃত করা যায়।

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^n \left\{1 + n.\frac{h}{a} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{h^2}{a^2} + \ldots\ldots\ldots\right\} - a^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n\, a^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} h^2 + \ldots\ldots\ldots}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{n\, a^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} h + h\text{-এর উচ্চতর ঘাত সংবলিত পদ}\right\}$$

$$= n\, a^{n-1}$$

উদা. 2. মান নির্ণয় কর :

(i) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ (ii) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{9x+7}\right)$

(i) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+9}{x+3}=\dfrac{9}{2}$

(ii) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{9x+7}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3-\frac{2}{x}}{9+\frac{7}{x}}=\dfrac{3-0}{9+0}=\dfrac{1}{3}$

উদা. 3. মান নির্ণয় কর :

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\dfrac{2}{2}=1$

উদা. 4. মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ [য. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০১; কু. বো. ২০০৮]

মনে করি $x=\dfrac{\pi}{2}+h$

$\therefore\ h\to 0$, যখন $x\to\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\dfrac{1-\cos h}{h^2}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}=\lim_{h\to 0}2\left(\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2\dfrac{1}{4}$

$=2\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

উদা. 5. মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$ [রা. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৯]

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2x\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin x}$

$=2.\dfrac{\lim_{x\to 0}\cos\frac{3x}{2}\times\lim_{x\to 0}\cos\frac{x}{2}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=2.\dfrac{1\times 1}{1}=2$

প্রশ্নমালা I B

নিচের সীমাগুলির মান নির্ণয় কর ঃ

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

2. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{x^2 - x - 12}$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

5 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x - 1}\left(\dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{2}{3x + 5}\right)$

7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$

8. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x}$ [ঢা. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০৩]

10 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - 4x + 1}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + 4)^3 - (x - 8)^2}{x(x - 3)}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}$ [সি. বো. ২০০৩]

14. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 1}}$ [দি. বো. ২০১০]

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$

16. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^{5/2} - a^{5/2}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ [ঢা. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০২; য. বো. ২০০০]

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 3x}}{x}$ [ব. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৩]

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x} - 1}$

19. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - \sqrt{(2 - x^2)}}{2x - \sqrt{(2 + 2x^2)}}$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{(1 + x^2)} - \sqrt{(1 + x)}}{\sqrt{(1 + x^3)} - \sqrt{(1 + x)}}$

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x + 1}$

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x}{2x^2 - 5}$.

23. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 3}{x^2 + 5x + 6}$

24. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^4 - 3x^2 + 1}{6x^4 + x^3 - 3x}$ 25. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 1}{6 + x - 3x^2}$

26. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ [চ. বো. ২০০০] 27. $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right)\left(\dfrac{5x^2 - 1}{x^2}\right)$

28. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \tan x$ [চ. বো. ২০১০] 29. $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$

30. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin^{-1} x}{x}$ [মা. বো. ২০০১] 31. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$ [ব. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯]

32. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ [মা. বো. ২০০০] 33. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan ax}{\sin bx}$ [ঢা. বো. ২০০৬]

34. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৪, ২০০০; য. বো. ২০১১, ২০০২; চ. বো. ২০১১, ২০০৮; ব. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০৪; সি. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৭; কু. বো. ২০১০, ২০০৬; রা. বো. ২০০৯, ২০০২; মা. বো. ২০০৭]

35. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$ [চ. বো. ২০০১] 36. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$

37. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 2x}$ 38. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$ [রা. বো. ২০০৬]

39. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x}$ [সি. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০৩]

40. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x}$ [চ. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০১১, ২০০৩]

41. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 7x}{3x^2}$ [কু. বো. ২০১১, ২০০৪, ২০০০; দি. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০১০; রা. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০৫; য. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৮, ২০০২; চ. বো. ২০০৬]

42. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos x}$ [ব. বো. ২০০৬; য. বো. ২০০৪] 43. $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos 4\theta}{\theta^2}$

44. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec^3 \theta - \tan^3 \theta}{\tan \theta}$ [দি. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০৫; মা. বো. ২০০৮]

45. $\lim_{x \to 0} \dfrac{6x - \sin 2x}{2x + 3 \sin 4x}$ 46. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$ [য. বো. ২০০৫]

47. $\lim_{x \to 0} \dfrac{3 \sin \pi x - \sin 3\pi x}{x^3}$ 48. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x^2 + x}$ [চ. বো. ২০০২]

49. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$ 50. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$ [রা. বো. ২০০৪]

51. $\lim_{x \to y} \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$ [কু. বো. ২০০৫]

52. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \{\sec x (\sec x - \tan x)\}$ [ঢা. বো. ২০০৭; মা. বো. ২০০৬]

53. $\lim_{x \to \infty} \{\ln (2x - 1) - \ln (x + 5)\}$

54. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$ [সি. বো. ২০০৪; কু. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০৫]

55. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ [মা. বো. ২০১০]

56. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x}$

57. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x}$

58. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x - \tan x}{\frac{\pi}{2} - x}$ [ব. বো. ২০০২; রা. বো. ২০০০]

59. $\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\tan \theta}\right)$ [ঢা. বো. ২০০১]

উত্তরমালা

1. 6	2. $\frac{1}{7}$	3. 6	4. -4
5. $\frac{1}{4}$	6. $\frac{1}{32}$	7. 6	8. 12
9. $-\frac{1}{2}$	10. $\frac{5}{2}$	11. $-21\frac{1}{3}$	12. 1
13. $\frac{7}{2}$	14. 0	15. $\frac{1}{2a}$	16. $5a^2$
17. $\frac{5}{2}$	18. 2	19. 2	20. 1
21. 2	22. $\frac{1}{2}$	23. 0	24. $\frac{1}{3}$
25. $-\frac{2}{3}$	26. 1	27. 5	28. 1
29. 1	30. 1	31. 0	32. $\frac{1}{2}$
33. $\frac{a}{b}$	34. $\frac{1}{2}$	35. $\frac{a^2}{b^2}$	36. $\frac{1}{2}$
37. $\frac{1}{8}$	38. $\frac{1}{2}$	39. 2	40. 1
41. $\frac{49}{6}$	42. 0	43. 8	44. $\frac{3}{2}$
45. $\frac{2}{7}$	46. -1	47. $4\pi^3$	48. 2
49. $\frac{5}{3}$	50. 1	51. $\cos y$	52. $\frac{1}{2}$
53. $\ln (2)$	54. $\frac{5}{2}$	55. 0	56. 0
57. 0	58. $\frac{1}{2}$	59. $\frac{1}{2}$	

দ্বিতীয় অধ্যায়

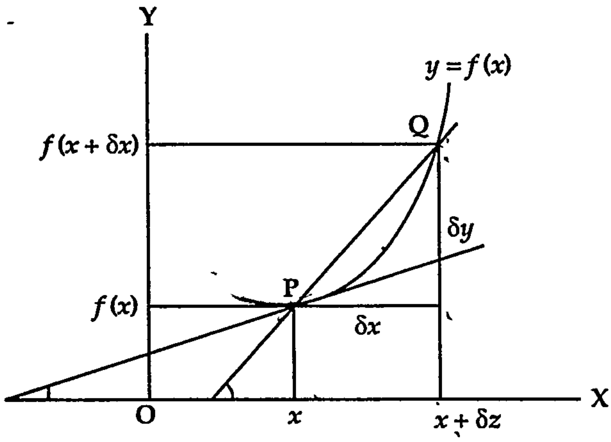
অন্তরীকরণ

DIFFERENTIATION

17. নতির ও সীমার মাধ্যমে অন্তরকের বর্ণনা ও নির্ণয়

মনে করি $y = f(x)$ বক্ররেখাটির উপর P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং P বিন্দুর স্থানাংক (x, y)। মনে করি বক্ররেখাটির উপর Q আর একটি বিন্দু এবং Q বিন্দুর স্থানাংক $(x + \delta x, y + \delta y)$। তাহলে,

$y + \delta y = f(x + \delta x)$। এটি থেকে $y = f(x)$ বিয়োগ করে পাই,



$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$$

প্রদত্ত চিত্র থেকে এটি স্পষ্ট যে PQ ছেদকের ঢাল,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \quad \dots (1)$$

x-কে স্থির রেখে যখন $\delta x \to 0$ হয়, তখন Q বিন্দু ক্রমশ P-এর দিকে অগ্রসর হয়ে P-এর সাথে প্রায় মিলে যায়। এ অবস্থায়, QP-ছেদকটি P বিন্দুতে স্পর্শকে পরিণত হয়। সুতরাং,

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ প্রকৃতপক্ষে $P(x, y)$ বিন্দুতে $y = f(x)$ বক্ররেখার স্পর্শকের ঢাল। (2)-এ উল্লেখিত ডানদিকের রাশিটিকে f-এর অন্তরক বলা হয় এবং $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$\delta x = h$ লিখে (3) থেকে পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

সংজ্ঞা ঃ যদি $y = f(x)$, x-এর একটি ফাংশন হয়, তবে,

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ -কে x-এর সাপেক্ষে $f(x)$-এর অন্তরক বলে।

অন্তরক একটি বিশেষ ধরনের লিমিট x-এর সাপেক্ষে $f(x)$-এর অন্তরক বোঝানোর জন্য আমরা y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$ প্রভৃতি প্রতীকও ব্যবহার করে থাকি।

অতএব, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

বা, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

মনে রাখতে হবে যে, $\frac{dy}{dx}$ একটি প্রতীক মাত্র যা $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ বোঝায়। কোনো অবস্থায়ই dy-কে লব এবং dx-কে হর ধরে $\frac{dy}{dx}$-কে একটি ভগ্নাংশ বিবেচনা করা যাবে না।

কোনো ফাংশনের অন্তরক নির্ণয় করার পদ্ধতিকে অন্তরীকরণ বলে এবং স্বাধীন চলরাশি বুঝাবার জন্য বলা হয় x-এর সাপেক্ষে $f(x)$-এর অন্তরক।

মূল নিয়মে কোনো ফাংশনের অন্তরক নির্ণয় করার জন্য অন্তরকের সংজ্ঞা ব্যবহার করা হয়। x-এর সম্পর্কে কোনো ফাংশন $f(x)$-এর অন্তরক নির্ণয় করার জন্য নিচের পদক্ষেপগুলি অনুসরণ করতে হয়।

(i) প্রদত্ত ফাংশনে x-এর জন্য $x + h$ বসাতে হবে।

(ii) নতুন মান থেকে ফাংশনের মান বিয়োগ করতে হবে অর্থাৎ $f(x+h) - f(x)$ বের করতে হবে।

(iii) $h \to 0$ হলে, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ এর লিমিট নির্ণয় করতে হবে।

19. $x = a$ তে, $f(x)$-এর অন্তরক [রা. বো. ২০১১]

যদি $f(x)$, x-এর একটি ফাংশন হয়, তাহলে

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ কে $x = a$-তে $f(x)$-এর অন্তরক বলে এবং একে $f'(a)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, সাধারণ বিন্দু x-এ $f(x)$-এর অন্তরক। সীমাটি নির্ণয় করার পর x-এর পরিবর্তে a বসালে $x = a$-তে $f(x)$-এর অন্তরক পাওয়া যাবে।

$x = a$ বিন্দুতে অন্তরক অস্তিত্বশীল হলে $x = a$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবশ্যই অবিচ্ছিন্ন হবে। কিন্তু বিপরীতক্রমে, কোনো বিন্দুতে একটি ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হলেও সেই বিন্দুতে ফাংশনটির অন্তরকের অস্তিত্ব নাও থাকতে পারে।

20. (A) মূল নিয়মে x^n-এর অন্তরক

[কু. বো. ২০০৯, ২০০২; সি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০১; মা. বো. ২০১০]

মনে করি, $f(x) = x^n$, তাহলে $f(x+h) = (x+h)^n$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}x^n = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n\left(1 + \frac{h}{x}\right)^n - x^n}{h}$$

যেহেতু, $h \to 0$, সুতরাং $|h|$-কে $|x|$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর মনে করা যায়, তখন $\frac{h}{x}$-এর সাংখ্যিক মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। অতএব $\left(1 + \frac{h}{x}\right)^n$-কে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তার করা যায়।

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}x^n = \lim_{h \to 0} \frac{x^n\left\{1 + n\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{h^2}{x^2} + \dots\dots\right\} - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots\dots\dots}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + h\text{-এর উচ্চতর ঘাত সংবলিত পদ}\right\}$$

$$= nx^{n-1}$$

অনুসি. $\frac{d}{dx}x = 1.x^{1-1} = x^0 = 1$

উদাহরণ ঃ নিচের ফাংশনগুলির অন্তর্ভূত চলরাশি সাপেক্ষে প্রত্যেকটির অন্তরক নির্ণয় কর ঃ

(i) x^7 **(ii)** $\sqrt[3]{y}$ **(iii)** $\frac{1}{t^3}$ **(iv)** $s^{3\cdot 5}$ **(v)** $x^{-\frac{1}{2}}$

(i) $\frac{d}{dx}x^7 = 7x^{7-1} = 7x^6$ (ii) $\frac{d}{dy}(\sqrt[3]{y}) = \frac{d}{dy}y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$

(iii) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^3}\right) = \frac{d}{dt}t^{-3} = -3t^{-3-1} = -3t^{-4} = -\frac{3}{t^4}$.

(iv) $\frac{d}{ds}(s^{3\cdot 5}) = 3\cdot 5\, s^{3\cdot 5-1} = 3\cdot 5\, s^{2\cdot 5}$ (v) $\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

(B) ধ্রুব ফাংশনের অন্তরক

মনে করি x-এর সকল মানের জন্য $f(x) = c$; তাহলে,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$\therefore$ c একটি ধ্রুবক হলে, $\frac{d}{dx}(c) = 0$

(C) কোনো ধ্রুবক এবং একটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরক

মনে করি, c একটি ধ্রুবক, তাহলে,

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)\}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{c\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} c \times \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c\frac{d}{dx}f(x)$$

সুতরাং কোনো ধ্রুবক ও একটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরক, ঐ ধ্রুবক ও ঐ ফাংশনের অন্তরকের গুণফলের সমান।

21. একই চলরাশিবিশিষ্ট দুইটি ফাংশনের যোগফল বা বিয়োগফলের অন্তরক

u এবং v উভয়ই x-এর ফাংশন হলে, $y = u + v$ স্পষ্টতই x-এর ফাংশন।

$y = u + v$

$\therefore$ $y + \delta y = u + \delta u + v + \delta v$

বিয়োগ করে পাই, $\delta y = \delta u + \delta v$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x\to 0}\left\{\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x}\right\} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u}{\delta x} + \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

অনুরূপভাবে, $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

অতএব, দুইটি ফাংশনের যোগফল বা বিয়োগফলের অন্তরক, ফাংশন দুইটির অন্তরকের যোগফল বা বিয়োগফলের সমান।

এ ফলটি যে কোনো সসীম সংখ্যক ফাংশনের ক্ষেত্রে সাধারণ সূত্ররূপে প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণ ঃ নিচের ফাংশনগুলির x-এর সাপেক্ষে অন্তরক নির্ণয় কর।

(i) $5x^3-3x^2+7x-9$ (ii) $\dfrac{x^7+4x^3}{x^5}$ (iii) $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (iv) $\dfrac{x^4-9}{x^2-3}$ (v) $(1-\sqrt{x})^2$

(i) $\dfrac{d}{dx}(5x^3-3x^2+7x-9)$

$$=\frac{d}{dx}(5x^3)-\frac{d}{dx}(3x^2)+\frac{d}{dx}(7x)-\frac{d}{dx}(9)$$

$$=5\times 3x^2-3\times 2x+7-0=15x^2-6x+7$$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^7+4x^3}{x^5}\right)=\dfrac{d}{dx}(x^2+4x^{-2})=\dfrac{d}{dx}(x^2)+4\dfrac{d}{dx}(x^{-2})$

$$=2x+4(-2)x^{-3}=2x-8x^{-3}=2x-\frac{8}{x^3}$$

(iii) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\dfrac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}})+\dfrac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4-9}{x^2-3}\right)=\dfrac{d}{dx}(x^2+3)=\dfrac{d}{dx}(x^2)+\dfrac{d}{dx}(3)=2x$

(v) $\dfrac{d}{dx}(1-\sqrt{x})^2=\dfrac{d}{dx}(1-2\sqrt{x}+x)=\dfrac{d}{dx}(1)-\dfrac{d}{dx}(2x^{\frac{1}{2}})+\dfrac{d}{dx}x$

$$=0-2\times\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+1=1-x^{-\frac{1}{2}}$$

প্রশ্নমালা II A

x-কে পরিবর্তনশীল ধরে নিচের ফাংশনগুলির অন্তরক নির্ণয় কর ঃ

1. $x^7, x, 5x^3, 9x^4, \frac{1}{5}x^5, \frac{2}{3}x^9$
2. $x^{-3}, 4x^{-5}, \frac{1}{x^2}, \frac{6}{x^4}$
3. $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{4}}, 3x^{-\frac{2}{3}}$
4. $\sqrt{x^3}, \sqrt[3]{x^2}, \sqrt{x^{-3}}$
5. $x^{7\cdot}+9$
6. $\sqrt[3]{(4x)}, \frac{2\cdot4}{x^{3\cdot4}}$
7. $5x^3+3x^2-4x-9$
8. $ax^2-2bx+c$
9. $\frac{x^9+x^3}{x^6}$
10. x^m-a^m
11. $(2x)^n-b^n$ [চ. বো. ২০০২]
12. $x^3(2^3-x^{-2})$
13. $2x^3-4x^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{2}x^{-\frac{2}{3}}+7$
14. $(x^2-5)^2$
15. $x(5-x+3x^2)$
16. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$
17. $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$
18. ax^n-bx^{n-1}

উত্তরমালা

1. $7x^6, 1, 15x^2, 36x^3, x^4, 6x^8$
2. $-3x^{-4}, -20x^{-6}, -2x^{-3}, -24x^{-5}$
3. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}, -2x^{-\frac{5}{3}}$
4. $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}; \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

5. $7x^6$

6. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}\,x^{-\frac{2}{3}},\ \frac{-8'16}{x^{4'4}}$

7. $15x^2+6x-4$

8. $2(ax-b)$

9. $3x^2-3/x^4$

10. mx^{m-1}

11. $2^n\,nx^{n-1}$

12. $24x^2-1$

13. $6x^2-10\,x^{3/2}-\frac{7}{3}x^{-5/3}$

14. $4x^3-20x$

15. $5-2x+9x^2$

16. $2x-\frac{2}{x^3}$

17. $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

18. $anx^{n-1}-b\,(n-1)\,x^{n-2}$

22. মূল নিয়মে কতিপয় ফাংশনের অন্তরক

(A) e^x-এর অন্তরক [সি. বো. ২০১১, ২০০৫, ২০০১; রা. বো. ২০১০, ২০০৫; য. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৬, ২০০১; ঢা. বো. ২০০৩, ২০০০; মা. বো. ২০০৯]

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\frac{(e^h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x\frac{\left(1+h+\frac{h^2}{2\,!}+\frac{h^3}{3\,!}+\dots\dots\dots\dots\dots-1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x\left\{l+\frac{h}{2\,!}+\frac{h^2}{3\,!}+h \text{ এর উচ্চতর ঘাত সংবলিত পদ}\right\}$$

$$= e^x$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

(B) a^x-এর অন্তরক, যখন a একটি ধনাত্মক ধ্রুবক [কু. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৮, ২০০৫; সি. বো. ২০০৭, ২০০৩; ব. বো. ২০০৭, ২০০৪, ২০০১; রা. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০৬, ২০০২; মা. বো. ২০০৭]

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x.\,a^h-a^x}{h}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{1+\frac{h}{1\,!}\ln a+\frac{h^2}{2\,!}(\ln a)^2+\dots\dots\dots\dots-1\right\}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\left\{\ln a+\frac{h}{2\,!}(\ln a)^2+h\text{-এর উচ্চতর ঘাত সংবলিত পদ}\right\}$$

$$= a^x \ln a$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\ln a$

(C) $\ln(x)$-এর অন্তরক [কু. বো. ২০১১, ২০০৩; চ. বো. ২০১১; ব. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০১; রা. বো. ২০০৯, ২০০২; দি. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৮, ২০০৬; য. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৬]

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}-\dots\dots\dots\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+h\text{-এর উচ্চতর ঘাত সংবলিত পদ}\right\}$$

$$= \frac{1}{x}$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$, $(x > 0)$

অনুসি. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$ [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৭; চ. বো. ২০০৮, ২০০৫]

আমরা জানি, $\log_a x = \ln x \times \log_a e$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\{\log_a e \times \ln x\} = \log_a e \cdot \frac{d}{dx}\ln x = \log_a e \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\log_a e$$

(D) $\sin x$-এর অন্তরক [কু. বো. ২০০৭, ২০০৪; য. বো. ২০০৪; চ. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০০৮, ২০০৫, ২০০০]

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x\cdot 1 = \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

(E) $\cos x$-এর অন্তরক [কু. বো. ২০১০, ২০০৫, ২০০০; দি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৮, ২০০৩; রা. বো. ২০০৭; মা. বো. ২০১১]

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(F) মূল নিয়মে নিচের ফাংশনগুলির x-এর সাপেক্ষে অন্তরক নির্ণয় কর :

(i) $\tan x$ [ঢা. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৬, ২০০৪; রা. বো. ২০০৪, ২০০০; ব. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০০৩, ২০০১]

(ii) $\cot x$ [য. বো. ২০০৬]

(iii) $\sec x$ [য. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০০; সি. বো. ২০১০, ২০০২; ব. বো. ২০০৬, ২০০২; কু. বো. ২০০১]

(iv) $\operatorname{cosec} x$ [চ. বো. ২০০৯, ২০০৩; রা. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৪]

(i) $$\frac{d}{dx}(\tan x) = \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x . \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

(ii) $$\frac{d}{dx}(\cot x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin x \cos(x+h) - \cos x \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-\sin(x+h-x)}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= -\lim_{h \to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -\frac{1}{\sin x \sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

(iii) $$\frac{d}{dx}(\sec x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h). \cos x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x.$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$.

(iv) $\frac{d}{dx}(\text{cosec}\, x) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{cosec}(x+h) - \text{cosec}\, x}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -1 \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\text{cosec}\, x \cot x$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\text{cosec}\, x) = -\text{cosec}\, x \cot x$

প্রশ্নমালা II B

নিচের ফাংশনগুলির x-এর সাপেক্ষে অন্তরক নির্ণয় কর ঃ

1. $6\sin x$
2. $8\cos x$
3. $4\sin x - \cos x$
4. $5\cos x + \ln(x)$
5. $3e^x - 5\ln(x)$
6. $7x^3 + 3\ln(x)$
7. $x - 3\log_a x + 5\cos x$
8. $2x^a - 5e^x + b\sin x$
9. $ax^4 - 4\log_a x$
10. $9\cos x - 3\ln(x) + 5$
11. $e^x - 3\sin x + 9x$
12. $7\log_a x - 5\ln(x) + 4\cos x$
13. মূল নিয়মে অন্তরক নির্ণয় কর ঃ

(i) $5x^4$ (ii) $\sin 2x$ [ঢা. বো. ২০০৫] (iii) e^{ax} [ব. বো. ২০০৯, ২০০৩; কু. বো. ২০০২]

(iv) $a\sqrt{x}$, $(x > 0)$ (v) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $(x > 0)$

(vi) a^x [কু. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৮, ২০০৫; ব. বো. ২০০৭, ২০০৪, ২০০১; সি. বো. ২০০৭, ২০০৩; রা. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০৬, ২০০২; মা. বো. ২০০৭]

(vii) $\log_a x$ [চ. বো. ২০০৮, ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৭, ২০০১]

(viii) $\cos 2x$ [ব. বো. ২০১১; মা. বো. ২০০৪, ২০০২] (ix) $\tan 3x$

উত্তরমালা

1. $6\cos x$ 2. $-8\sin x$ 3. $4\cos x + \sin x$ 4. $\frac{1}{x}-5\sin x$

5. $3e^x-\frac{5}{x}$ 6. $3\left(7x^2+\frac{1}{x}\right)$ 7. $1-\frac{3}{x}\log_a e-5\sin x$

8. $2ax^{a-1}-5e^x+b\cos x$ 9. $4\left(ax^3-\frac{1}{x}\log_a e\right)$

10. $-9\sin x-\frac{3}{x}$ 11. $e^x-3\cos x+9$ 12. $\frac{7}{x}\log_a e-\frac{5}{x}-4\sin x$

13. (i) $20x^3$ (ii) $2\cos 2x$ (iii) ae^{ax} (iv) $\frac{a}{2\sqrt{x}}$ (v) $-\frac{1}{2x^{3/2}}$

(vi) $a^x\ln(a)$ (vii) $\frac{1}{x}\log_a e$ (viii) $-2\sin 2x$ (ix) $3\sec^2 3x$

23. দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরক

মনে করি, u এবং v উভয়েই x-এর ফাংশন ; ফলে $y=uv$-ও x-এর ফাংশন।

$$y=uv \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\therefore \quad y+\delta y=(u+\delta u)(v+\delta v) \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই, $\delta y=u\,\delta v+v\,\delta u+(\delta u)(\delta v)$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x}=u\frac{\delta v}{\delta x}+v\frac{\delta u}{\delta x}+\delta u.\frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\left(u\frac{\delta v}{\delta x}\right)+\lim_{\delta x\to 0}\left(v\frac{\delta u}{\delta x}\right)+\lim_{\delta x\to 0}\left(\delta u.\frac{\delta v}{\delta x}\right)$$

$$=u\lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)+v\lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)+\lim_{\delta x\to 0}\delta u.\lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)$$

যেহেতু, $\delta x\to 0$ হলে, $\delta u\to 0$ হয়, অতএব $\lim_{\delta x\to 0}\delta u.\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta v}{\delta x}=0$

অতএব, $\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

সুতরাং দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরক

= প্রথম ফাংশন × দ্বিতীয় ফাংশনের অন্তরক + দ্বিতীয় ফাংশন × প্রথম ফাংশনের অন্তরক।

উল্লেখ্য যে সূত্রটিকে সসীম সংখ্যক ফাংশনের গুণফলের জন্যও সম্প্রসারিত করা যায়।

উদা. 1. $\frac{d}{dx}(x^3\sin x)=x^3\frac{d}{dx}\sin x+\sin x.\frac{d}{dx}x^3$

$$=x^3\cos x+3x^2\sin x$$

উদা. 2. $\frac{d}{dx}\left\{(x^2+1)\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right\}$

$$= (x^2+1)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\left(\frac{1}{2}x+1\right)\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)+2x\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}+x^2+2x$$

$$= \frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$$

উদা. 3. $\frac{d}{dx}\{5e^x \ln(x)\}=\frac{d}{dx}\{(5e^x). \ln x\}$ [য. বো. ২০০৪]

$$=5e^x\frac{d}{dx}\ln(x)+\ln x\frac{d}{dx}(5e^x)$$

$$=5e^x.\frac{1}{x}+5e^x.\ln x$$

$$=5e^x.\left\{\frac{1}{x}+\ln x\right\}, (x>0)$$

প্রশ্নমালা II C

নিচের ফাংশনগুলির x-এর সাপেক্ষে অন্তরক নির্ণয় কর ঃ

1. x^3e^x
2. $x^2 \sin x$
3. $e^x \cos x$
4. $4e^x \sin x$
5. $x^2 \ln(x)$
6. $x^3 \log_a x$
7. $5e^x \log_a x$ [ব. বো. ২০০৮]
8. $4x^3e^x+5$
9. $(\log_a x) \ln x$ [কু. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০০]
10. $3\sqrt{x}\cos x-7$
11. $\frac{2}{3}\sin x \ln x$
12. $ax^n \cos x$
13. $(x^2+3)(2x^2-1)$
14. $(3x+4)(5x^2-1)$
15. $(x-2)(x^2+2x+4)$
16. $ax \ln(x)+be^x \sin x$
17. $(x^2+7)(x^2-7)$
18. $x^2 \log_a x+7e^x \cos x$ [সি. বো. ২০০৪]

উত্তরমালা

1. $x^3 e^x+3x^2 e^x$
2. $x^2 \cos x+2x \sin x$
3. $e^x(\cos x-\sin x)$
4. $4e^x(\cos x+\sin x)$
5. $x+2x \ln(x)$
6. $x^2 \log_a e+3x^2 \log_a x$
7. $5e^x\left(\frac{1}{x}\log_a e+\log_a x\right)$
8. $4x^3e^x+12x^2e^x$
9. $\frac{1}{x}\log_a x+\frac{1}{x}\{\ln x\}\log_a e$
10. $-3\sqrt{x}\sin x+\frac{3}{2\sqrt{x}}\cos x$
11. $\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{x}\sin x+\cos x \ln x\right\}$
12. $a(nx^{n-1}\cos x-x^n \sin x)$
13. $8x^3+10x$
14. $45x^2+40x-3$
15. $3x^2$
16. $a\{1+\ln(x)\}+be^x(\cos x+\sin x)$
17. $4x^3$
18. $x\{\log_a e+2\log_a x\}+7e^x(-\sin x+\cos x)$

24. দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরক

মনে করি u, v উভয়ই চলরাশি x-এর ফাংশন, ফলে $y = \frac{u}{v}$ ও x-এর ফাংশন।

$$y = \frac{u}{v} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$y + \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

(ii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই,

$$\delta y = \frac{u+\delta u}{v+\delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{uv + v\,\delta u - uv - u\,\delta v}{v(v+\delta v)} = \frac{v\,\delta u - u\,\delta v}{v(v+\delta v)}$$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}}{v\,(v+\delta v)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}}{v\,(v+\delta v)}$$

$$= \frac{\lim_{\delta x \to 0}\left(v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}\right)}{\lim_{\delta x \to 0} v(v+\delta v)}$$

$$= \frac{\lim_{\delta x \to 0} v\frac{\delta u}{\delta x} - \lim_{\delta x \to 0} u\frac{\delta v}{\delta x}}{\lim_{\delta x \to 0} v\,(v+\delta v)}$$

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \quad [\because \delta x \to 0 \text{ হলে, } \delta v \to 0 \text{ হয়}]$$

অতএব, $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

সুতরাং, দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরক = $\frac{(\text{হর} \times \text{লবের অন্তরক}) - (\text{লব} \times \text{হরের অন্তরক})}{(\text{হর})^2}$

উদা. 1. $$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^2}{x^2-4}\right\} = \frac{(x^2-4)\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\frac{d}{dx}(x^2-4)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{2x\,(x^2-4) - x^2.\,2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= -\frac{8x}{(x^2-4)^2}$$

উদা. 2. $$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\cos x}{\ln\ x}\right\} = \frac{\ln x\frac{d}{dx}\cos x - \cos x\frac{d}{dx}\ln x}{(\ln x)^2} = \frac{-\sin x \ln x - \frac{1}{x}\cos x}{(\ln x)^2}$$

প্রশ্নমালা II D

নিচের ফাংশনগুলির অন্তর্গত চলরাশি সাপেক্ষে প্রত্যেকটির অন্তরক নির্ণয় কর ঃ

1. $\dfrac{3x}{x-1}$ 2. $\dfrac{2x-3}{2x+1}$ 3. $\dfrac{\sin x}{x}$ 4. $\dfrac{\ln(x)}{\sin x}$

5. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ [রা. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০৩]

6. $\dfrac{x^3}{\cos x}$ 7. $\dfrac{x}{x^2+a^2}$ 8. $\dfrac{\sec x}{1+\sec x}$

9. $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$ [দি. বো. ২০১০] 10. $\dfrac{\ln x}{x}$ 11. $\dfrac{2t-3}{2-3t}$

12. $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$ [কু. বো.২০০৪] 13. $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ [রা. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৩]

14. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ 15. $\dfrac{x^n+\tan x}{e^x-\cot x}$ 16. $\dfrac{\tan x+\cot x}{3e^x}$

17. $\dfrac{1+y+y^2}{y}$ 18. $\dfrac{e^x+\ln x}{\log_a x}$ [দি. বো. ২০১১; ব. বো. ২০০১]

19. $\dfrac{\sin x}{x^2+\cos x}$ [রা. বো. ২০১০] 20. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ 21. $\dfrac{\tan x-\cot x}{\tan x+\cot x}$
[চ. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৬]

উত্তরমালা

1. $-\dfrac{3}{(x-1)^2}$ 2. $\dfrac{8}{(2x+1)^2}$ 3. $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

4. $\dfrac{\frac{1}{x}\sin x-\ln(x)\cos x}{\sin^2 x}$ 5. $\dfrac{-1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-1)^2}$ 6. $\dfrac{3x^2\cos x+x^3\sin x}{\cos^2 x}$

7. $\dfrac{a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}$ 8. $\dfrac{\sec x\tan x}{(1+\sec x)^2}$ 9. $\dfrac{-2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

10. $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ 11. $\dfrac{-5}{(2-3t)^2}$ 12. $\dfrac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}$

13. $\dfrac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$ 14. $\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$

15. $\dfrac{(e^x-\cot x)(nx^{n-1}+\sec^2 x)-(x^n+\tan x)(e^x+\operatorname{cosec}^2 x)}{(e^x-\cot x)^2}$

16. $\{(\tan x+\cot x)(\tan x-\cot x-1)\}\div 3e^x$ 17. $\dfrac{y^2-1}{y^2}$

18. $\left\{\left(e^x+\dfrac{1}{x}\right)\log_a x-\left(e^x+\ln x\right)\left(\dfrac{1}{x}\log_a e\right)\right\}\div(\log_a x)^2$ 19. $\dfrac{1+x(x\cos x-2\sin x)}{(x^2+\cos x)^2}$

20. $\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2-x+1)^2}$ 21. $2\sin 2x$

25. সংযোজিত ফাংশনের অন্তরক

প্রমাণ করতে হবে যে, যদি y, z-এর একটি ফাংশন হয়, যেখানে z, x-এর একটি ফাংশন, তাহলে $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

মনে করি, x-এর সামান্য বৃদ্ধি δx-এর জন্য, z ও y-তে বৃদ্ধি যথাক্রমে δz এবং δy ; যেহেতু এই বৃদ্ধিগুলি সসীম, অতএব,

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\delta y}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}$$

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\left(\frac{\delta y}{\delta z}\cdot\frac{\delta z}{\delta x}\right) = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta z}\cdot \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta z}{\delta x}$$

যেহেতু, z, x-এর একটি ফাংশন, অতএব, $\delta x\to 0$ হলে, $\delta z\to 0$ হবে।

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta z\to 0}\frac{\delta y}{\delta z}\cdot \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta z}{\delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

উল্লেখ্য যে, সূত্রটিকে অধিক সংখ্যক ফাংশনের জন্য সম্প্রসারিত করা যায়।

মনে করি, $y=f(u)$, $u=F(v)$, $v=\phi(z)$ এবং $z=\psi(x)$

তাহলে, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

উদা. 1. $\sin x^3$-এর অন্তরক নির্ণয় কর।

মনে করি, $y=\sin x^3$ এবং $z=x^3$ ... ... (i)

$\therefore y=\sin z$ ... ... (ii)

(ii) থেকে পাই, $\frac{dy}{dz}=\cos z=\cos x^3$ এবং (i) থেকে, $\frac{dz}{dx}=3x^2$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=(\cos x^3)\,3x^2$

$\therefore \frac{d}{dx}(\sin x^3)=3x^2\cos x^3$

উদা. 2. x-কে পরিবর্তনশীল ধরে $\sqrt[3]{5x^2-4}$-এর অন্তরক নির্ণয় কর।

মনে করি $y=\sqrt[3]{(5x^2-4)}$ এবং $z=5x^2-4$ ... ... (i)

$\therefore y=\sqrt[3]{z}=z^{\frac{1}{3}}$ ... ... (ii)

(ii) থেকে, $\frac{dy}{dz}=\frac{1}{3}z^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(5x^2-4)^2}}$

(i) থেকে, $\frac{dz}{dx}=10x$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2-4)^2}}$

উদা. 3. x-কে পরিবর্তনশীল ধরে $\sqrt{x^2+a^2}$-এর অন্তরক নির্ণয় কর।

মনে করি, $y=\sqrt{x^2+a^2}$ এবং $z=x^2+a^2$ ... ... (i)

$\therefore\ y=\sqrt{z}=z^{\frac{1}{2}}$ ... ... (ii)

(ii) থেকে, $\frac{dy}{dz}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{2\sqrt{(x^2+a^2)}}$

(i) থেকে, $\frac{dz}{dx}=2x$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{(x^2+a^2)}}\times 2x$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}\{\sqrt{x^2+a^2}\}=\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$

উদা. 4. x-এর সাপেক্ষে $(ax+b)^n$-এর অন্তরক নির্ণয় কর।

মনে করি $y=(ax+b)^n$ এবং $z=ax+b$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(ax+b)^n=\frac{d}{dz}(z^n).\ \frac{dz}{dx}$$

$$=nz^{n-1}.\ a=an\ (ax+b)^{n-1}$$

উদা. 5. $y=\sqrt{(1-x)\ (1+x)}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)\ \frac{dy}{dx}+xy=0$ [য. বো. ২০০৪]

$$y=\sqrt{(1-x)\ (1+x)}=\sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1-x^2)$$

$$=\frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}(-2x)=-\frac{x}{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot 2=-\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\ \frac{dy}{dx}=-x$$

বা, $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\ \frac{dy}{dx}+x=0$

বা, $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+x\ (1-x^2)^{\frac{1}{2}}=0$

$\therefore\quad (1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=0.$

উদা. 6. $y=\tan\ (m\tan^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)\ y_1=m\ (1+y^2)$ যেখানে $y_1=\frac{dy}{dx}$ [কু. বো. ২০০৪]

$y=\tan\ (m\ \tan^{-1}x)$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\tan\ (m\ \tan^{-1}x)$$

$$= \sec^2 (m \tan^{-1} x). \frac{d}{dx} m \tan^{-1} x$$

$$= 1 + \tan^2 (m \tan^{-1} x). \frac{m}{1+x^2}$$

$$= \frac{m(1+y^2)}{1+x^2}$$

আমরা পাই, $y_1 = \frac{m(1+y^2)}{1+x^2}$,

বা, $(1+x^2)\, y_1 = m(1+y^2)$

উদা. 7. x-এর সাপেক্ষে নিচের ফাংশনগুলির অন্তরক নির্ণয় কর।

(i) $\sin(ax+b)$ (ii) $\cos(ax+b)$ (iii) $\tan(ax+b)$ (iv) e^{ax+b} (v) $\ln(ax+b)$

(i) মনে করি $y = \sin(ax+b)$ এবং $z = ax+b$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(ax+b) = \frac{d}{dz}(\sin z).\frac{dz}{dx}$$

$$= \cos z.\, a = a\cos(ax+b)$$

(ii) $y = \cos(ax+b)$ এবং $z = ax+b$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos(ax+b) = \frac{d}{dz}(\cos z).\frac{dz}{dx} = -\sin z.\, a$$

$$= -a\sin z = -a\sin(ax+b)$$

(iii) $y = \tan(ax+b)$ এবং $z = ax+b$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan(ax+b) = \frac{d}{dz}(\tan z)\frac{dz}{dx} = \sec^2 z.\, a$$

$$= a\sec^2(ax+b)$$

(iv) $y = e^{ax+b}$ এবং $z = ax+b$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{ax+b} = \frac{d}{dz}(e^z)\frac{dz}{dx}$$

$$= e^z.\, a = ae^{ax+b}$$

(v) মনে করি, $y = \ln(ax+b)$ এবং $z = ax+b$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\ln(ax+b)\}$$

$$= \frac{d}{dz}\{\ln(z)\}.\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{1}{z}.a = \frac{a}{ax+b}$$

প্রশ্নমালা II E

x-কে পরিবর্তনশীল ধরে নিচের ফাংশনগুলির অন্তরক নির্ণয় কর ঃ

1. $\sin 3x$; $\cos\frac{x}{3}$; $\tan\frac{1}{2}x$; $\cot 5x$; $\ln(2x)$ 2. $\sin^2 x$; $\sin\sqrt{x}$; $\cos^3 x$; $[\ln(x)]^3$; $\sec\sqrt{x}$

3. $3e^{4x}$; $e^{\sqrt{x}}$; e^{-3x} ; $e^{(4-3x)}$ 4. $\sqrt{\left(\frac{1}{e^x}\right)}$; $e^{\sin x}$; e^{x^2-5x+2}

5. $(3x-5)^4$; $(1-x)^{-1}$; $\dfrac{1}{(5x-2)^2}$ 6. $\dfrac{1}{\sqrt{(4-x)}}$; $\sqrt[3]{(x^2+1)}$; $\dfrac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$

7. $\sqrt{\sin x}$; $\sqrt{\ln x}$; $\ln(\sqrt{x})$; $\sqrt{(\sec x)}$ 8. $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\cos(5\pi-x)$; $\sin^2 x^2$

9. $(3-5x)^{-\frac{2}{5}}$; $\sqrt{ax^2+bx+c}$; $\ln(\cos x)$ [রা. বো. ২০১০] 10. e^{5x^2} ; $\ln(px+q)$; $\ln\left[\dfrac{a+x}{a-x}\right]$

11. $\ln[e^x+e^{-x}]$ [কু. বো. ২০০৮]; $\ln\left[\dfrac{e^x}{1+e^x}\right]$; $\dfrac{1}{1+\cos x}$

12. x^2e^{4x} ; $\sin x \times \ln(\sin x)$; $x\sqrt{\sin x}$ [ঢা. বো. ২০০৮]

13. $e^{ax}\sin^2 x$; $e^{-ax}\cos 3x$ 14. $x^2 \ln(4-x)$; $\dfrac{x^2}{e^{x+2}}$

15. $2x^\circ \cos 3x^\circ$ [সি. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৬; দি. বো. ২০১১, ২০০৯; কু. বো. ২০১০, ২০০৫; ব. বো. ২০০৭; রা. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৫]

16. (i) $(x^2-2x-9)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2-4x+7}}$ 17. (i) $\ln(\sin 2x)$ [ঢা. বো. ২০১১] (ii) $\ln(x^3-2x^2)$

উত্তরমালা

1. $3\cos 3x$, $-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$, $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$, $-5\,\text{cosec}^2 5x$, $\frac{1}{x}$

2. $\sin 2x$, $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $-3\cos^2 x\sin x$, $\dfrac{3}{x}\{\ln(x)\}^2$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$

3. $12e^{4x}$, $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$, $-3e^{-3x}$, $-3(e^{4-3x})$

4. $-\frac{1}{2}e^{-x/2}$, $e^{\sin x}(\cos x)$, $(2x-5)\,e^{x^2-5x+2}$

5. $12(3x-5)^3$, $(1-x)^{-2}$, $\dfrac{-10}{(5x-2)^3}$ 6. $\dfrac{1}{2(4-x)^{3/2}}$, $\dfrac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}}$, $\dfrac{-x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

7. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$, $\dfrac{1}{2x}$, $\dfrac{1}{2}\tan x\sqrt{\sec x}$

8. $3\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin(5\pi-x)$, $4x\sin x^2\cos x^2$

9. $2(3-5x)^{-7/5}$, $\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)^{-\frac{1}{2}}(2ax+b)$, $-\tan x$

10. $10x\,e^{5x^2}$, $\dfrac{p}{px+q}$, $\dfrac{2a}{a^2-x^2}$ 11. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $\dfrac{1}{1+e^x}$, $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

12. $2xe^{4x}(1+2x)$, $\cos x\{1+\ln(\sin x)\}$, $\sqrt{\sin x}+\dfrac{x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

13. $e^{ax}\sin x(2\cos x+a\sin x)$, $-e^{-ax}(a\cos 3x+3\sin 3x)$

14. $x\left\{2\ln(4-x)-\dfrac{x}{4-x}\right\}$, $\dfrac{x(2-x)}{e^{x+2}}$ 15. $\dfrac{\pi}{90}\left\{\cos\dfrac{\pi x}{60}-\dfrac{\pi x}{60}\sin\dfrac{\pi x}{60}\right\}$

16. (i) $\frac{2}{3}(x^2-2x-9)^{-2/3}(x-1)$ (ii) $-\frac{2}{5}(x^2-4x+7)^{-6/5}(x-2)$

17. (i) $2\cot 2x$ (ii) $\dfrac{(3x-4)}{x(x-2)}$

26. যদি y, x-এর ফাংশন হয়, তাহলে, দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, যেখানে কোনো অন্তরকই শূন্য নয়

x-এর সামান্য বৃদ্ধি δx-এর জন্য যদি y-এর বৃদ্ধি δy হয়, তাহলে, $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{1}{\frac{\delta x}{\delta y}}$

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\left\{\frac{1}{\delta x/\delta y}\right\}=\frac{1}{\lim\limits_{\delta x\to 0}\frac{\delta x}{\delta y}}$$

কিন্তু $\delta x\to 0$ হলে, $\delta y\to 0$ হবে,

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{dy}{\delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\delta y\to 0}\frac{\delta x}{\delta y}} \quad \text{বা, } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

27. বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরক

(i) মনে করি, $y=\sin^{-1}x$, তাহলে, $x=\sin y$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(ii) মনে করি, $y=\cos^{-1}x$, তাহলে, $x=\cos y$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) মনে করি, $y=\tan^{-1}x$, তাহলে, $x=\tan y$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{1+x^2}$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$

(iv) মনে করি, $y=\cot^{-1}x$, তাহলে, $x=\cot y$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=-\text{cosec}^2 y=-(1+\cot^2 y)=-(1+x^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{1+x^2}$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x)=-\frac{1}{1+x^2}$

(v) মনে করি, $y=\sec^{-1}x$, তাহলে, $x=\sec y$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\sec y\tan y=\sec y\sqrt{\sec^2 y-1}$$

$$=x\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(vi) মনে করি, $y=\text{cosec}^{-1}x$, তাহলে, $x=\text{cosec}\,y$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=-\text{cosec}\,y\cot y=-\text{cosec}\,y\sqrt{\text{cosec}^2 y-1}$$

$$=-x\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

সুতরাং, $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

উদাহরণমালা

উদা. 1. x-কে পরিবর্তনশীল ধরে নিচের ফাংশনগুলির অন্তরক নির্ণয় কর :

(i) $\sin^{-1}ax$, **(ii)** $\tan^{-1}\sqrt{x}$, **(iii)** $x\tan^{-1}x$

(i) মনে করি $y=\sin^{-1}ax$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}}\times\frac{d}{dx}(ax)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$$

(ii) মনে করি, $y=\tan^{-1}\sqrt{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\times\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{1+x}\times\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

(iii) মনে করি, $y=x\tan^{-1}x$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x\tan^{-1}x)$$

$$=x\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)+\tan^{-1}x\frac{d}{dx}(x)$$

$$=\frac{x}{1+x^2}+\tan^{-1}x$$

উদা. 2. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। (i) $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ (ii) $y = \tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right]$

(i) $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1}x + \tan^{-1}1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x + \tan^{-1}1) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) + \frac{d}{dx}(\tan^{-1}1) = \frac{1}{1+x^2}$$

(ii) $y = \tan^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right]$

মনে করি, $u = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ তাহলে, $y = \tan^{-1}u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{d}{dx}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{1-x}}(-\frac{1}{2})\,(1-x)\,)^{-\frac{3}{2}}(-1)$$

$$= \frac{1-x}{2-x}\cdot\frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2(2-x)\,(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

প্রশ্নমালা II F

x-কে পরিবর্তনশীল ধরে নিচের ফাংশনগুলির অন্তরক নির্ণয় কর ঃ

1. 5^x 2. a^{px+q} 3. $\sin^{-1}x^2$

4. $\sin^{-1}3x$ 5. $\cos^{-1}\frac{x}{3}$ 6. $\tan^{-1}\frac{x}{a}$

7. $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ 8. $(\sin^{-1}x)^2$ 9. $\tan^{-1}(e^x)$ [ঢা. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৪]

10. $\cot^{-1}(e^x)$ 11. $\sin^{-1}(2x-1)$ 12. $\tan^{-1}(ax)$

13. $\tan^{-1}\frac{1}{x^2}$ 14. $\cos^{-1}(ax+b)$ 15. $\sin^{-1}(\sin x)$

16. $\tan x \sin^{-1}x$ [ঢা. বো. ২০০৫] 17. $\tan(\sin^{-1}x)$ [কু. বো. ২০১১, ২০০৮; ঢা. বো. ২০১০; য. বো. ২০১০; সি. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯, ২০০২; ব. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৮; মা. বো. ২০০৭]

18. $\ln(\cos^{-1}x)$ 19. $(x^2+1)\tan^{-1}x - x$ [য. বো. ২০১১; দি. বো. ২০১০; মা. বো. ২০০৬]

20. (i) $a^{\sin^{-1}x}$ (ii) $x^2\sin^{-1}(1-x)$ [ব. বো. ২০০৮; রা. বো. ২০০৬]

উত্তরমালা

1. $5^x\ln(5)$ 2. $pa^{px+q}\,.\ln(a)$ 3. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

4. $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ 5. $\frac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$ 6. $\frac{a}{a^2+x^2}$

7. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 8. $2\sin^{-1}x\,.\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 9. $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

10. $-\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ 11. $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 12. $\dfrac{a}{1+a^2x^2}$

13. $\dfrac{-2x}{x^4+1}$ 14. $-\dfrac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$ 15. 1

16. $\sec^2 x\sin^{-1}x+\dfrac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$ 17. $(1-x^2)^{-3/2}$

18. $-\dfrac{1}{\cos^{-1}x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 19. $2x\tan^{-1}x$

20. (i) $\dfrac{a^{\sin^{-1}x}.\ \text{In}(a)}{\sqrt{(1-x^2)}}$ (ii) $2x\sin^{-1}(1-x)-\dfrac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$

28. পরামিতিক সমীকরণ (Parametric equations)

অনেক সময় সুবিধার জন্য সঞ্চারপথের সমীকরণে x এবং y-কে তৃতীয় আর একটি চলরাশির মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। এই তৃতীয় চলরাশিকে পরামিতি বলে। পরামিতি অপসারণ না করেও $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করার পদ্ধতি নিচে দেখান হলো।

মনে করি, $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t)$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

উদা. 1. যদি $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ হয়, তাহলে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

$x=a(\theta-\sin\theta)$ $\therefore\ \dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$

$y=a(1-\cos\theta)$ $\therefore\ \dfrac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$

অতএব, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\cot\dfrac{\theta}{2}$

উদা. 2. যদি $x=e^t\cos t$ এবং $y=e^t\sin t$ হয়, তাহলে $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় কর।

$x=e^t\cos t$ $\therefore\ \dfrac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

$y=e^t\sin t$ $\therefore\ \dfrac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$$

উদা. 3. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ এবং $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় কর।

$\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ $\quad \therefore \; y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = 2\tan^{-1} t$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \therefore \; x = \sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2} = 2\tan^{-1} t$

$\therefore \; y = x \quad \therefore \; \frac{dy}{dx} = 1$

প্রশ্নমালা II G

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ঃ

1. $x = a\cos t,\; y = b\sin t$
2. $x = a\sec^2\theta,\; y = a\tan^3\theta$
3. $x = e^{\theta}\sin\theta,\; y = e^{\theta}\cos\theta$
4. $x = \sqrt{t},\; y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$
5. $x = a\sec\phi,\; y = b\tan\phi$
6. $x = at^2,\; y = 2at$
7. $x = 2\sin t,\; y = \cos 2t$
8. $x = \cos^3\theta,\; y = \sin^3\theta$
9. $x = a(\cos\phi + \phi\sin\phi),\; y = a(\sin\phi - \phi\cos\phi)$
10. $x = \frac{3at}{1+t^3},\; y = \frac{3at^2}{1+t^3}$
11. $x = \cos\theta,\; y = 4\sin^2\theta$
12. $x = a\cos^3\theta,\; y = b\sin^3\theta$

উত্তরমালা

1. $-\frac{b}{a}\cot t$
2. $\frac{3}{2}\tan\theta$
3. $\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$
4. $2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$
5. $\frac{b}{a}\operatorname{cosec}\phi$
6. $\frac{1}{t}$
7. $-2\sin t$
8. $-\tan\theta$
9. $\tan\phi$
10. $(ay - x^2)/(y^2 - ax)$
11. $-8x$
12. $-\frac{b}{a}\tan\theta$

29. লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ (Logarithmic differentiation)

কোনো ফাংশনের সূচক অন্য আর একটি ফাংশন হলে অথবা কোনো ফাংশন কয়েকটি ফাংশনের গুণফল দ্বারা গঠিত হলে, প্রথমে ফাংশানটির লগ নিয়ে পরে অন্তরক নির্ণয় সহজতর হয়।

উদা. 1. x-কে পরিবর্তনশীল ধরে নিচের ফাংশনগুলির অন্তরক নির্ণয় কর ঃ
(i) $(\sin^{-1}x)^{\ln x}$ [মা. বো. ২০০৬] (ii) $(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-4x)$

(i) মনে করি, $y = (\sin^{-1}x)^{\ln x}$ তাহলে, $\ln y = \ln x \,.\, \ln(\sin^{-1}x)$

উভয় পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ln(\sin^{-1}x) + \frac{1}{\sin^{-1}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\ln x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\sin^{-1}x)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}\ln(\sin^{-1}x) + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x}\right], \text{ (এখানে } x > 0, \sin^{-1}x \neq 0)$$

(ii) মনে করি $y=(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-4x)$,

তাহলে, $\ln y=\ln(1-x)+\ln(1-2x)+\ln(1-3x)+\ln(1-4x)$

উভয় পক্ষকে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1-x}+\frac{-2}{1-2x}+\frac{-3}{1-3x}+\frac{-4}{1-4x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-(1-x)(1-2x)(1-3x)(1-4x)\times\left[\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1-2x}+\frac{3}{1-3x}+\frac{4}{1-4x}\right]$$

$$=96x^3-150x^2+70x-10.$$

উদা 2. x-কে পরিবর্তনশীল ধরে অন্তরীকরণ কর : (i) $x^{\sin x}$ (ii) $x^{\ln x}$ [সি. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০৮]

(i) মনে করি $y=x^{\sin x}$ $\therefore \ln(y)=\ln(x^{\sin x})=\sin x\ln x$

উভয় পক্ষকে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\cos x.\ln x+\frac{1}{x}\sin x$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx}=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{1}{x}\sin x\right)$

(ii) মনে করি, $y=x^{\ln x}$

$\therefore \ln y=\ln x.\ln x=[\ln x]^2$

উভয় পক্ষকে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=2\ln x.\frac{1}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=x^{\ln(x)}.\frac{2\ln x}{x}$

প্রশ্নমালা II H

অন্তরক নির্ণয় কর :

1. $(2x+1)\sqrt[3]{x^3-1}$ 2. $(1+e^{2x})/(1-e^{2x})$ 3. $(1+\sin 2x)^2$

4. $\frac{x+2}{\sqrt{(x^2+4x)}}$ 5. $\ln(ax^2+bx+c)$

6. $\ln\{\sqrt{(x-a)}+\sqrt{(x-b)}\}$ [চ. বো. ২০০১]

7. $\ln[x-\sqrt{x^2-1}]$ [কু. বো. ২০১০, ২০০৩; চ. বো. ২০০৫; রা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৬]

8. $\ln[x+\sqrt{x^2\pm a^2}]$ 9. (i) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ (ii) $\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)}$

10. (i) $\frac{(x+1)^2\sqrt{(x-1)}}{(x+4)^3e^x}$ [কু. বো. ২০০৯] (ii) $\frac{e^{-x}(3x+5)}{7x-1}$ [য. বো. ২০০৫]

11. $\log_x a$ [য. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৬; রা. বো. ২০০১]

12. $\sin^2[\ln(\sec x)]$ [কু. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০৯]

13. $\sqrt{(\sin^{-1}x^5)}$ [ব. বো. ২০০৬, ২০০৪] 14. $[\ln(\sin x^2)]^n$ [সি. বো. ২০০৬]

15. (i) x^x [ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৭, ২০০০; কু. বো. ২০০৯, ২০০৬; ব. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০৪, ২০০১]

(ii) $x^{\frac{1}{x}}$ [সি. বো. ২০০৯, ২০০৭, ২০০৬; ঢা. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০৩]

(iii) x^{x^x} [য. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৮, ২০০৬]

(iv) $(\sin x)^{\tan x}$ [মা. বো. ২০১০]

(v) $x^{\cos^{-1}x}$ [ঢা. বো. ২০১০, ২০০৫; রা. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০৫; কু. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০৩; য. বো. ২০১০, ২০০৩; ব. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০৩; দি. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৮, ২০০৬, ২০০২; মা. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০৫, ২০০৩]

(vi) e^{x^x}

(vii) e^{e^x}

(viii) x^{e^x}

(ix) $(x^x)^x$ [ঢা. বো. ২০১১; ব. বো. ২০১১; দি. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৯, ২০০১; কু. বো. ২০০৫; সি. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০০৯]

(x) a^{a^x}

(xi) $(1+x)^x$

(xii) $(1+x^2)^{2x}$ [ব. বো. ২০০৬]

(xiii) $x^x \ln(x)$ [দি. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০৪; য. বো. ২০০২]

(xiv) $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$ [কু. বো. ২০১১; চ. বো. ২০১০, ২০০২; ব. বো. ২০০৫]

(xv) $a^{\ln(\cos x)}$ [রা. বো. ২০০৫]

(xvi) $e^{x^2}+x^{x^2}$ [ঢা. বো. ২০০৬]

(xvii) $(\sin^{-1} x)^x$

16. অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(i) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ [মা. বো. ২০০৫] (ii) $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

(iii) $\sin^{-1}(3x-4x^3)$ (iv) $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$

(v) $\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (vi) $\cot^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}$ [ঢা. বো. ২০০৮, ২০০৪; সি. বো. ২০০৮, ২০০৪, ২০০১; রা. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০১১, ২০০৮]

(vii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ [রা. বো. ২০০৩] (viii) $\tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

(ix) $\tan^{-1}\dfrac{4x}{1-4x^2}$ [ব. বো. ২০০৪] (x) $\sin^{-1}\{2x\sqrt{(1-x^2)}\}$ [কু. বো. ২০০৬; ঢা. বো. ২০০৪]

(xi) $\sin^{-1}\{2ax\sqrt{(1-a^2x^2)}\}$ [কু. বো. ২০০৮] (xii) $\tan^{-1}\{(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})\}$ [কু. বো. ২০০০]

(xiii) $\tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}$ [চ. বো. ২০১১, ২০০৬; সি. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৭]

(xiv) $\tan^{-1}\dfrac{a+bx}{a-bx}$ [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৯; য. বো. ২০১১, ২০০২; ব. বো. ২০০৯]

(xv) $\cos^{-1}\{2x\sqrt{(1-x^2)}$ [ঢা. বো. ২০১০; কু. বো. ২০১০; য. বো. ২০১০, ২০০১]

(xvi) $\tan^{-1}\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)$ (xvii) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ [চ. বো. ২০০৯]

(xviii) $\sec^{-1}\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ [সি. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৭;, য. বো. ২০০৬; ব. বো. ২০০৩]

17. নিচের ফাংশনগুলির অন্তরক নির্ণয় কর ঃ

(i) $\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^n$ (ii) $\ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2}\right\}$ [সি. বো. ২০০৩]

(iii) $\sqrt{(e^{\sqrt{x}})}$ [ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৬; কু. বো. ২০০৪] (iv) $\ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$

(v) $\sqrt{\{(x+1)(x+2)\}}$ (vi) $\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

(vii) $\left\{\frac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}\right\}^n$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

(ix) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x+x^2}}$ (x) $\frac{\sqrt{1-3x}}{4x}$

18. (i) $\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ (ii) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ [দি. বো. ২০১০]

19. (i) $\frac{x\sin x}{1+\cos x}$ [চ. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৪; ব. বো. ২০১১, ২০০৮; সি. বো. ২০১০, ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০০; কু. বো. ২০০৬; য. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০০৪]

(ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ [চ. বো. ২০০৩] 20. (i) $10^{\ln(\sin x)}$ [চ. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০৫, ২০০২]

(ii) $x\ln x\ \ln\{\ln x\}$

21. (i) $\tan^{-1}\left\{\frac{b}{a}\tan x\right\}$ (ii) $\tan^{-1}(\sin e^x)$ [য. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৫, ২০০৩; ব. বো. ২০০৫]

22. (i) $\sin^2\{\ln(x^2)\}$ [য. বো. ২০০৮, ২০০৭, ২০০১; চ. বো. ২০০৬]

(ii) $\sin^{-1}\sqrt{(xe^x)}$ [ব. বো. ২০১০]

23. (i) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$ [ঢা. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০২; মা. বো. ২০১১]

(ii) $\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$ [ব. বো. ২০১০, ২০০৫; রা. বো. ২০০৮, ২০০৩; কু. বো. ২০০৮; মা. বো. ২০০৬]

24. (i) $\ln[\sqrt{\sin\theta\cos\theta})]$ (ii) $\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)^2$

25. (i) $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$ [য. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০৩]

(ii) $\tan^{-1}\{(\cos x-\sin x)/(\cos x+\sin x)\}$

26. (i) $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2$ (ii) $\ln\left[\frac{\sqrt{(x+1)}-1}{\sqrt{(x+1)}+1}\right]$

27. (i) $\ln\left[\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right]$ (ii) $\log_{10}x$ [ঢা. বো. ২০১১] (iii) $\log_{10}3x$ [য. বো. ২০০৬]

28. (i) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$ [ঢা. বো. ২০০৫] (ii) $\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$ [সি. বো. ২০০৭, ২০০৫]

29. (i) $\ln\sqrt{\left\{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right\}}$ [রা. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৭] (ii) $\tan^{-1}\sqrt{\left\{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right\}}$

[কু. বো. ২০১১, ২০০৫; রা. বো. ২০১০, ২০০৫; য. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৭]

30. (i) $(\cot x)^{\tan x}$ [ব. বো. ২০০৯; দি. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৩ ; মা. বো. ২০০৮, ২০০৪]

(ii) $(ax)^{bx}$ (iii) $(\sin x)^x$ [য. বো. ২০০৭; মা. বো. ২০১১]

(iv) $\{(\ln(x)\}^x$ (v) $(\sin x)^{\ln(x)}$ [মা. বো. ২০০২]

31. (i) $\sin x \sin 2x \sin 3x$ (ii) $\operatorname{cosec}(\operatorname{cosec} x)$

32. (i) $\dfrac{\operatorname{cosec} x + \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x}$ (ii) $\sin [\ln (\tan x)]$

(iii) $e^{2 \ln (\tan 5x)}$ [ব. বো. ২০১১, '০৬; সি. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৪; চ. বো. ২০০২]

(iv) $\tan^{-1} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

33. (i) $\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$ [সি. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৬; রা. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৫, ২০০১]

(ii) $\cos [\ln(x)] + \ln (\tan x)$ [সি. বো. ২০০৬; ব. বো. ২০০৩]

(iii) $\dfrac{a \sin x + b \cos x}{a \cos x - b \sin x}$

(iv) $\tan^{-1} \dfrac{4\sqrt{x}}{1-4x}$ [ব. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০৯, ২০০৫; সি. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৬, ২০০৪]

34. (i) $\sin \left\{2 \tan^{-1} \sqrt{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$ [রা. বো. ২০১১, ২০০৯; দি. বো. ২০১১, ২০০৯; চ. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০২; য. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৮]

(ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{a \cos x - b \sin x}{b \cos x + a \sin x}\right)$ (iii) $2 \tan^{-1} \sqrt{\left(\dfrac{x-a}{b-x}\right)}$ (iv) $\tan^{-1} \dfrac{a+bx}{b-ax}$ [ব. বো. ২০০১]

উত্তরমালা

1. $(4x^3 + x^2 - 2)(x^3 - 1)^{-2/3}$ 2. $4e^{2x}/(1 - e^{2x})^2$

3. $4 \cos 2x (1 + \sin 2x)$ 4. $-4/(x^2 + 4x)^{3/2}$ 5. $\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$

6. $\dfrac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ 7. $-\dfrac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}$ 8. $\dfrac{1}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}}$

9. (i) $\dfrac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2}$ (ii) $\dfrac{-1}{1 - \cos x}$

10. (i) $\dfrac{(x+1)^2 \sqrt{(x-1)}}{(x+4)^3 e^x} \left\{\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{3}{x+4} - 1\right\}$

(ii) $-e^{-x}(21x^2 + 32x + 33)(7x - 1)^2$

11. $-\ln a/x \{\ln x\}^2$

12. $\sin \{2 \ln (\sec x) \tan x$

13. $\frac{1}{2} (\sin^{-1} x^5)^{\frac{1}{2}} \{1/\sqrt{(1 - x^{10})}\}. 5x^4$

14. $n \{\ln (\sin x^2)\}^{n-1} (1/\sin x^2). \cos x^2. 2x$

15. (i) $x^x \{\ln x + 1\}$ (ii) $x^{\frac{1}{x}-2} \{1 - \ln x\}$

(iii) $x^{x^x}. x^x \left[\ln x \{\ln x + 1\} + \dfrac{1}{x}\right]$

(iv) $(\sin x)^{\tan x}\{\sec^2 x\ \ln(\sin x)+1\}$

(v) $x^{\cos^{-1}x}\left\{-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\cos^{-1}x}{x}\right\}$ (vi) $e^{x^x}.\,x^x\{\ln x+1\}$

(vii) $e^{e^x}.\,e^x$ (viii) $x^{e^x}.e^x\left\{\ln x+\dfrac{1}{x}\right\}$ (ix) $x^{x^2}.\,x\{2\ln x+1\}$

(x) $a^{a^x}.\,a^x\{\ln a\}^2$ (xi) $(1+x)^x\left\{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}\right\}$

(xii) $(1+x^2)^{2x}\left\{\dfrac{4x^2}{1+x^2}+2\ln(1+x^2)\right\}$

(xiii) $x^{x-1}\{1+x\ln x(1+\ln x)\}$ (xiv) $\frac{1}{2}(\sqrt{x})^{\sqrt{x}-1}\{1+\ln\sqrt{x}\}$

(xv) $-\tan x\,.\,a^{\ln(\cos x)}.\ln a$ (xvi) $2xe^{x^2}+x^{x^2+1}\{1+\ln(x^2)\}$

(xvii) $(\sin^{-1}x)^x\left\{\dfrac{x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}}+\ln(\sin^{-1}x)\right\}$

16. (i) $2/(1+x^2)$ (ii) $1/\{2(1+x^2)\}$ (iii) $3/\sqrt{1-x^2}$
(iv) $2/(1+x^2)$ (v) $2/(1+x^2)$ (vi) $-1/(1+x^2)$
(vii) $-1/(x\sqrt{x^2-1})$ (viii) $3/(1+x^2)$ (ix) $4/(1+4x^2)$
(x) $2/\sqrt{(1-x^2)}$ (xi) $2a/\sqrt{(1-a^2x^2)}$ (xii) $-1/\{2(1+x)\sqrt{x}\}$
(xiii) $1/\{(1+x)\sqrt{x}\}$ (xiv) $\dfrac{ab}{a^2+b^2x^2}$ (xv) $-2/\sqrt{(1-x^2)}$
(xvi) 0 (xvii) $-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (xviii) $\dfrac{2}{1+x^2}$

17. (i) $\dfrac{n\{x+\sqrt{(1+x^2)}\}^n}{\sqrt{(1+x^2)}}$ (ii) $\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$ (iii) $\dfrac{1}{4\sqrt{x}}\sqrt{(e^{\sqrt{x}})}$

(iv) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$ (v) $(2x+3)/\,2\sqrt{\{(x+1)(x+2)\}}$

(vi) $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{(1-x^2)}}$ (vii) $n\left\{\dfrac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}\right\}^n/x\sqrt{(1-x^2)}$

(viii) $\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)}}-\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)}}\right\}$ (ix) $\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2-2x-2}{\sqrt{1-x}\,(\sqrt{1+x+x^2})^{3/2}}$ (x) $\dfrac{3x-2}{8x^2\sqrt{1-3x}}$

18. (i) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ (ii) $\dfrac{x^2}{1-x^4}$

19 (i) $\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}$ (ii) $\dfrac{-2}{1+x^2}$

20. (i) $\cot x,\ 10^{\ln(\sin x)}.\ln(10)$ (ii) $\ln\{\ln(x)\}\{1+\ln(x)\}+1$

21. (i) $\dfrac{ab}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$ (ii) $\dfrac{e^x\cos(e^x)}{1+\sin^2e^x}$

22. (i) $\dfrac{2}{x}\sin\{4\ln(x)\}$ (ii) $\dfrac{e^x(1+x)}{2\sqrt{\{xe^x(1-xe^x)\}}}$

23. (i) 0 (ii) $-2\sin x$ 24. (i) $\cot 2\theta$ (ii) $2\tan x.\sec^2x$

25. (i) $\dfrac{1}{2}$ (ii) -1 26. (i) $\dfrac{-8x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$ (ii) $1/x(\sqrt{x}+1)$

27. (i) $2(1-x^2)/(1+x^2+x^4)$ (ii) $\frac{1}{x}\log_{10}e$

28. (i) $-\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{-1}{2\sqrt{(1-x^2)}}$

29. (i) $\text{cosec}\, x$ (ii) $\frac{1}{2}$

30. (i) $(\cot x)^{\tan x}\{\sec^2 x\{\ln(\cot x)-1)\}$ (ii) $(ax)^{bx}.\, b\,[1+\ln(ax)]$

(iii) $(\sin x)^x[x\cot x+\ln(\sin x)]$ (iv) $\{\ln x\}^x\left[\frac{1}{\ln(x)}+\ln\{\ln x\}\right]$

(v) $\sin^{\ln(x)}\left[\frac{1}{x}\ln(\sin x)+\ln x.\cot x\right]$

31. (i) $\cos x\sin 2x\sin 3x+2\cos 2x\sin x\sin 3x+3\cos 3x\sin x\sin 2x$
(ii) $\text{cosec}\, x\cot x\,\text{cosec}(\text{cosec}\, x).\cot(\text{cosec}\, x)$

32. (i) $\frac{-2\sin x}{(1-\cos x)^2}$ (ii) $2\,\text{cosec}\, 2x\cos\{\ln(\tan x)\}$ (iii) $10\tan 5x\sec^2 5x$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

33. (i) $\frac{-\{x\tan x+\ln(\cos x)\}}{x^2}$ (ii) $2\,\text{cosec}\, 2x-\frac{1}{x}\sin\{\ln x\}$

(iii) $(a^2+b^2)/(a\cos x-b\sin x)^2$ (iv) $\frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$

34. (i) $\frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ (ii) -1 (iii) $\frac{1}{\sqrt{\{(x-a)(b-x)\}}}$ (iv) $\frac{1}{1+x^2}$

30. অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ (Differentiation of implicit function)

যদি x ও y-কে জড়িত করে কোনো সমীকরণ গঠিত হয় এবং এই সমীকরণ থেকে y-কে সরাসরি x-এর মাধ্যমে প্রকাশ করা না যায়, তবে ফাংশনটিকে অব্যক্ত ফাংশন বলে। অব্যক্ত ফাংশনকে সাধারণত $f(x,y)=0$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অব্যক্ত ফাংশনের ক্ষেত্রে, x-কে পরিবর্তনশীল ধরে ও y-কে x-এর একটি অজ্ঞাত ফাংশনরূপে গণ্য করে সমীকরণের প্রতিটি পদকে অন্তরীকরণ করা হয় এবং পরে $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় কর।

উদা. 1. যদি $x^y=e^{x-y}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln x}{\{1+\ln x\}^2}$ [য. বো. ২০০৫]

$x^y=e^{x-y}$ $\therefore\ y\ln x=x-y$

বা, $y[1+\ln x]=x$

বা, $y=\frac{x}{1+\ln x}$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1+\ln x-x.\frac{1}{x}}{[1+\ln x]^2}=\frac{\ln x}{[1+\ln x]^2}$$

উদা. 2. যদি $x^y y^x=1$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x^2}.\frac{1-\ln x}{1-\ln y}$

$x^y.y^x=1$

$\therefore\quad y\ln x+x\ln y=0\quad \ldots\quad \ldots\quad (1)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx}\ln x+\frac{y}{x}+\ln y+\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

বা, $\left(\ln x+\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=-\left(\ln y+\frac{y}{x}\right)$

বা, $\left[\frac{y\ln x + x}{y}\right]\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{x\ln y + y}{x}\right]$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\frac{x\ln y + y}{y\ln x + x}$

$= -\frac{y}{x}\frac{y - y\ln x}{x - x\ln y}$ [(1) থেকে]

$= -\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{1 - \ln(x)}{1 - \ln(y)}$

প্রশ্নমালা II I

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ঃ

1. $x^2 - xy + y^2 = 3$
2. $x^3 - 3xy + y^3 = 1$
3. $x^3y + xy^3 = 2$
4. $y = \tan(x + y)$
5. $x + y = xy^2$
6. $x^2 + y^2 = \sin(xy)$
7. $y = x^y$
8. $x^y = y^x$ [চ. বো. ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৩, ২০০০; মা. বো. ২০০৮]
9. $x^a y^b = (x - y)^{a+b}$
10. $xy + x^2y^2 = c$
11. $y = \cot(x + y)$
12. $\sin x = c \operatorname{cosec} y$
13. $3x^4 - x^2y + 2y^3 = 0$
14. $x = y.\ln(xy)$
15. $(\cos x)^y = (\sin y)^x$
16. $e^{xy} - 4xy = 2$ [কু. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৩]
17. $\ln(xy) = x + y$
18. $y = \sin(x + y)^2$ [য. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৭; রা. বো. ২০০৪]

উত্তরমালা

1. $\frac{2x - y}{x - 2y}$
2. $\frac{x^2 - y}{x - y^2}$
3. $-\frac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}$
4. $-\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)$
5. $\frac{y^2 - 1}{1 - 2xy}$
6. $\frac{y\cos(xy) - 2x}{2y - x\cos(xy)}$
7. $\frac{y^2}{x\{1 - \ln y\}}$
8. $\frac{y\{x\ln y - y\}}{x\{y\ln x - x\}}$
9. $\frac{y}{x}$
10. $-\frac{y}{x}$
11. $-\frac{1 + y^2}{2 + y^2}$
12. $-\frac{\tan y}{\tan x}$
13. $\frac{2x(6x^2 - y)}{x^2 - 6y^2}$
14. $\frac{y(x - y)}{x(x + y)}$
15. $\frac{y\tan x + \ln(\sin y)}{\ln(\cos x) - x\cot y}$
16. $-\frac{y}{x}$
17. $\frac{y}{x}\frac{x - 1}{1 - y}$
18. $\frac{2(x + y)}{\sec(x + y)^2 - 2(x + y)}$

তৃতীয় অধ্যায়

পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ

SUCCESSIVE DIFFERENTIATION

31. x-এর সম্পর্কে $y = f(x)$-এর প্রথম অন্তরক $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, y_1 বা, y' প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। প্রথম অন্তরকও সাধারণত x-এর একটি ফাংশন। x-এর এই নতুন ফাংশনের (x-এর সম্পর্কে) অন্তরককে $f(x)$-এর দ্বিতীয় অন্তরক বলা হয়। $f(x)$-এর দ্বিতীয় অন্তরক $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ বা সংক্ষেপে $\frac{d^2y}{dx^2}$, $f''(x)$, y_2 বা y'' দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অনুরূপভাবে, x-এর সম্পর্কে $\frac{d^2y}{dx^2}$-এর অন্তরককে $f(x)$-এর তৃতীয় অন্তরক বলা হয় এবং একে $\frac{d^3y}{dx^3}$, $f'''(x)$, y_3 বা, y''' দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং এরূপভাবে $f(x)$-এর n-তম অন্তরক $\frac{d^ny}{dx^n}$, $f^n(x)$ বা y_n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

32. কতকগুলি বিশেষ ফাংশনের n-তম অন্তরক

(i) $y = x^n$, যেখানে n-একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

$y_1 = nx^{n-1}$; $y_2 = n(n-1)x^{n-2}$; $y_3 = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

এরূপভাবে দেখান যায় যে,

$y_r = n(n-1)(n-2) \ldots \ldots \ldots \{n-(r-1)\}x^{n-r}\ (r < n)$

$\therefore\ y_n = n(n-1)(n-2) \ldots \ldots \ldots 3.2.1 = n!$

অনুসি. যেহেতু, $y_n = n!$ যা একটি ধ্রুবক, অতএব, $y_{n+1}, y_{n+2} \ldots \ldots \ldots$ সবগুলির মান শূন্য।

(ii) $y = (ax+b)^m$, যেখানে m যে কোনো সংখ্যা।

$y_1 = ma(ax+b)^{m-1}$, $y_2 = m(m-1)a^2(ax+b)^{m-2}$

$y_3 = m(m-1)(m-2)a^3(ax+b)^{m-3}$

এভাবে, আমরা পাই,

$$y_n = m(m-1)(m-2) \ldots \ldots \ldots \{m-(n-1)\}a^n(ax+b)^{m-n}$$

$$= m(m-1)(m-2) \ldots \ldots \ldots (m-n+1)\,a^n(ax+b)^{m-n}$$

$= \frac{m!}{(m-n)!}a^n(ax+b)^{m-n}$, যেখানে m, n অপেক্ষা বৃহত্তর একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

অনুসি. $m = n$ হলে, $y_n = n!\,a^n$

m যদি n অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোনো সংখ্যা হয়, তবে $\frac{d^n}{dx^n}(ax+b)^m = 0$

(iii) $y = e^{ax}$ $\therefore$ $y_1 = ae^{ax}$, $y_2 = a^2e^{ax}$, $y_3 = a^3e^{ax}$ ... ... $y_n = a^n e^{ax}$

(iv) $y = \frac{1}{x+a}$, $y_1 = (-1)(x+a)^{-2}$, $y_2 = (-1)(-2)(x+a)^{-3}$

বা, $y_2 = (-1)^2\ 2!\,(x+a)^{-3}$, অনুরূপভাবে, $y_3 = (-1)^3\,3!.\,(x+a)^{-4}$

এবং $y_n = (-1)^n \ n!\,(x+a)^{-(n+1)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

(v) $y = \ln(x+a)$

$y_1 = \dfrac{1}{x+a}$

অতএব, (iv)-এর পদ্ধতি অনুসরণ করে পাই, $y_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$

অনুসি. $y = \ln(ax+b)$ হলে, $y_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$

(vi) $y = \sin(ax+b)$

$$y_1 = a\cos(ax+b) = a\sin\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$y_2 = a^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right) = a^2\sin\left(2.\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$y_3 = a^3\cos\left(2.\frac{\pi}{2} + ax + b\right) = a^3\sin\left(3.\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

... ...

অনুরূপভাবে $y_n = a^n \sin\left(\dfrac{n.\pi}{2} + ax + b\right)$

এভাবে দেখান যায় যে, $y = \cos(ax+b)$ হলে, $y_n = a^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

$b = 0$ হলে, আমরা পাই, $D^n(\sin ax) = a^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{2} + ax\right)$

$$D^n(\cos ax) = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$$

উদাহরণমালা

উদা 1. x-এর সম্পর্কে $(2x-5)^3$-এর প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় অন্তরক নির্ণয় কর।

মনে করি $y = (2x-5)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3\times 2\,(2x-5)^2 = 6(2x-5)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\times 2\times 2\,(2x-5) = 24(2x-5)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2\times 24 = 48$$

উদা. 2. যদি $y = a\sin x + b\cos x$ হয়, তবে দেখাও যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

$y = a\sin x + b\cos x$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = a\cos x - b\sin x,\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -a\sin x - b\cos x$

বা, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -(a\sin x + b\cos x)$

বা, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -y \qquad \therefore \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

উদা. 3. y_n- নির্ণয় কর, যেখানে

(i) $y = \sin^3 x$; $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\therefore \quad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$\therefore \quad y_n = \frac{1}{4}\left[3\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right) - 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)\right]$

(ii) $y = \sin 3x \cos 2x = \frac{1}{2}(2\sin 3x \cos 2x) = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)$

$\therefore y_n = \frac{1}{2}\left[5^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}+5x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\right]$

প্রশ্নমালা III A

1. $y = x(x^2 - 5)$ হলে, $\frac{d^3y}{dx^3}$ নির্ণয় কর।

2. x-কে পরিবর্তনশীল ধরে $5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - x + 9$-এর তৃতীয় অন্তরক নির্ণয় কর এবং $x = 2$ হলে, এর মান নির্ণয় কর।

3. $y = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এবং $\frac{d^3y}{dx^3}$ নির্ণয় কর।

4. $y = \sin x$ হলে দেখাও যে, $y_4 - y = 0$ [রা. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৪]

5. $y = 4x^{\frac{3}{2}} - 3 + 2x^{\frac{1}{2}}$ হলে y_2 নির্ণয় কর এবং $x = 4$ হলে, এর মান নির্ণয় কর।

6.(i) $y = \ln(\sin x)$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$ [চ. বো. ২০০৯]

(ii) $y = x^2 . \ln x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x}$

7. নিচের ফাংশনগুলির n-তম অন্তরক (y_n) নির্ণয় কর ঃ

(i) $\frac{1}{a-x}$ (ii) $\ln\{(a-x)/(a+x)\}$ (iii) $\ln(ax+x^2)$

(iv) $\cos 2x \cos x$ (v) $\cos^3 x$ (vi) $\sin x \sin 3x$

(vii) $\ln x$ (viii) $\frac{1}{x}$ [ঢা. বো. ২০০২] (ix) $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

8. (i) $y = \tan x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$ [মা. বো. ২০০২]

(ii) $y = e^x \cos x$ হলে, দেখাও যে, $y_4 + 4y = 0$

(iii) $y = \frac{\ln x}{x}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$ [দি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০৪, ২০০১]

9. (i) $y = a\cos x + b\sin x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0$

(ii) $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ হলে, দেখাও যে, $y_2 - m^2y = 0$ [সি. বো. ২০১১; দি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০১]

10. (i) $y = \sin^{-1} x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$

(ii) $y = (\cos^{-1} x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$ [সি. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৩; য. বো. ২০০৩; কু. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৪; মা. বো. ২০০৮]

(iii) যদি $\cos\sqrt{y} = x$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$ [ঢা. বো. ২০১১, ২০০১; সি. বো. ২০১০, ২০০৪; রা. বো. ২০০৯, ২০০৭; য. বো. ২০০৮, ২০০৬; চ. বো. ২০০৬; সি. বো. ২০০৪]

11. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ হলে, দেখাও যে, $2x\frac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}$ [কু. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৭, ২০০৩; য. বো. ২০০৭; মা. বো. ২০০১]

12. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ হলে, দেখাও যে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

13. $y = \sqrt{(4 + 3\sin x)}$ হলে, দেখাও যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$ [কু. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৫; দি. বো. ২০১১; চ. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০২; সি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৮; রা. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৬, ২০০১; ব. বো. ২০০২; মা. বো. ২০১১]

14. $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, [ব. বো. ২০১১, ২০০৩, ২০০১; ঢা. বো. ২০১০; ২০০৫;

$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0$ রা. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৪]

15. যদি $y = \tan^{-1}x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$ [ঢা. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০৫; মা. বো. ২০০৭, ২০০৫]

16. (i) $y = (\sin^{-1}x)^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$

[রা. বো. ২০১১, ২০০১; ব. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০০; মা. বো. ২০১০, ২০০৩]

(ii) $x = \sin\sqrt{y}$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$

[চ. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৮, ২০০৩; ব. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০৩]

17. $y = e^{\tan^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$ [দি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৪, ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০২, ২০০০; মা. বো. ২০১১]

18. $y = (p + qx)e^{-2x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ [ব. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০২, ২০০০]

19. $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ হলে, দেখাও যে, (i) $(1 + x^2)y_1 = m(1 + y^2)$ [কু. বো. ২০০৭, ২০০৪]

(ii) $(1 + x^2)y_2 - 2(my - x)y_1 = 0$

[য. বো. ২০১১; সি. বো. ২০০৬; ঢা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৬]

20. $y = \tan x + \sec x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$ [রা. বো. ২০১০, ২০০৫, ২০০১ ; কু. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৩]

21. $y = (e^x + e^{-x})\sin x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$ [ঢা. বো ২০১০, ২০০৪; রা. বো. ২০০৬]

22. $y = \sin(\sin x)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\tan x + y\cos^2 x = 0$

[সি. বো. ২০১১, ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০৫ ; ঢা. বো. ২০০১]

23. $y = \sec x$ হলে, দেখাও যে, $y_2 = y(2y^2 - 1)$ [য. বো. ২০১১, ২০০৮; কু. বো. ২০১০, ২০০২, ২০০০; চ. বো. ২০০৮, ২০০৬, ২০০৪; রা. বো. ২০০৭, ২০০২; সি. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৫, ২০০১]

24. $y = e^x\cos x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

[দি. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৫, ২০০৩; রা. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০২; মা. বো. ২০০৮]

25. $y = ax^2 + \frac{b}{\sqrt{x}}$ হলে, দেখাও যে, $2x^2y_2 - xy_1 - 2y = 0$ [কু. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৬]

26. (i) $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$. [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৩ ; ব. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৯, ২০০২; সি. বো. ২০০৯, ২০০৭, ২০০৪; চ. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০১; রা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৯, ২০০৬]

(ii) $\ln y = a\sin^{-1}x$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$ [ঢা. বো. ২০০৭]

27. $y = a\cos[\ln x] + b\sin[\ln x]$ হলে, দেখাও যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ [ঢা. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৭, ২০০০]

28. যদি $\ln y = \tan^{-1}x$ হয় তবে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$
[কু. বো. ২০১১; রা. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০৫, ২০০২; য. বো. ২০১০]

29. $y = \ln[x + \sqrt{a^2+x^2}]$ হলে, দেখাও যে, $(a^2+x^2)y_2 + xy_1 = 0$
[চ. বো. ২০১০; য. বো. ২০০৩, ২০০১; মা. বো. ২০১০]

30. যদি $y = (x+\sqrt{1+x^2})^m$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$
[য. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯]

31. যদি $y = ax\sin x$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2y_2 - 2xy_1 + (x^2+2)y = 0.$

32. যদি $y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y$ [চ. বো. ২০১১; দি. বো. ২০১১; সি. বো. ২০১০, ২০০৮; কু. বো. ২০০৬; রা. বো. ২০০৬, ২০০০; য. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৯]

উত্তরমালা

1. 6

2. $120x - 12,\ 228$ 3. $2 + \frac{6}{x^4},\ -\frac{24}{x^5}$

5. $3x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2},\ \frac{23}{16}.$

7. (i) $\frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$ (ii) $(n-1)!\left\{\frac{(-1)^n}{(a-x)^n} + \frac{(-1)^n}{(a+x)^n}\right\}$

(iii) $(-1)^{n-1}(n-1)!\left\{\frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+a)^n}\right\}$

(iv) $\frac{1}{2}\left\{3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\right\}$ (v) $\frac{1}{4}\left\{3\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right) + 3^n\cos\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)\right\}$

(vi) $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right) - 2^{2n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$ (vii) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ (viii) $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

(ix) $(-1)^n n!\left\{\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{5}{(x-2)^{n+1}} + \frac{5}{(x-3)^{n+1}}\right\}$

33. ম্যাকলরিনের উপপাদ্য (Maclaurin's theorem) [চ. বো. ২০১১, ২০০৮; য. বো. ২০১০; দি. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৭, ২০০২, ২০০১; রা. বো. ২০০৬, ২০০৩]

$f(x)$ যদি x-এর এমন একটি ফাংশন হয়, যাকে x-এর ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক, ক্রমবর্ধমান শক্তির একটি অসীম সিরিজে বিস্তৃত করা যায় এবং যদি ঐ বিস্তৃতির প্রতিটি পদ যে কোনো সংখ্যকবার অন্তরীকরণযোগ্য হয়, তাহলে,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots\dots\dots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \dots\dots\dots\dots$$

মনে করি, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$

পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$f''(x) = 2.1\, a_2 + 2.3\, a_3 x + 3.4\, a_4 x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$f'''(x) = 1.2.3.\, a_3 + 2.\,3.4\, a_4 x + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

এরূপে, $f^{iv}(x), f^{v}(x)$ ইত্যাদি তাদের প্রতিটিতে $x = 0$ বসালে,

$f(0) = a_0, f'(0) = a_1, f''(0) = 2!\, a_2,\ f'''(0) = 3!\, a_3$ ইত্যাদি ... ...

অনুরূপভাবে, $f^n(0) = n! a_n$

$a_0, a_1, a_2 \dots\dots\dots\dots\dots$ এর মান (1)-এ স্থাপন করে পাই,

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots\dots\dots\dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \dots\dots\dots\dots\dots \infty$$

উদাহরণমালা

উদা. 1. ম্যাকলরিনের উপপাদ্যের সাহায্যে $\sin x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর।

[ঢা. বো. ২০১১, ২০০৩, ২০০০; কু. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০২, ২০০০; সি. বো. ২০১০, ২০০১; চ. বো. ২০০৮, ২০০৩, ২০০০ ; ব. বো. ২০০৮, ২০০৪ ; য. বো. ২০০৭; রা. বো. ২০০২; ম. বো. ২০০৮, ২০০৪, ২০০১]

$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$f^{iv}(x) = \sin x \qquad f^{iv}(0) = 0$

$f^{v}(x) = \cos x \qquad f^{v}(0) = 1$

... ...

$f^n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

ম্যাকলরিনের উপপাদ্য, $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$ ... ...

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

এই ধারা x-এর সকল মানের জন্য খাটে।

উদা. 2. দেখাও যে, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

[কু. বো. ২০১১, ২০০১ ; রা. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৩,২০০১ ; চ. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০১০]

$f(x) = e^x, f(0) = 1$

$f'(x) = e^x, f'(0) = 1, f''(x) = e^x, f''(0) = 1, \dots\dots\dots\dots\ f^n(x) = e^x$

ম্যাকলরিনের উপপাদ্য থেকে, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

এই ধারা x-এর সকল মানের জন্য খাটে।

উদা. 3. $\ln(1+x)$-কে x-এর ঊর্ধ্বক্রমিক ঘাতে অনন্ত ধারায় বিস্তার কর।
[সি. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০২; কু. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০৬, ২০০৪; রা. বো. ২০০৯, ২০০৫, ২০০৩, ২০০২; চ. বো. ২০০৯, ২০০৪, ২০০০; য. বো. ২০০৮, ২০০৪; ব. বো. ২০০৫, ২০০২; ঢা. বো. ২০০৩, ২০০১; মা. বো. ২০১১, ২০০৬, ২০০৩, ২০০১]

$f(x)=\ln(1+x)$, $\quad f(0)=0$; $\quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $\quad f'(0)=1$;

$f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $\quad f''(0)=-1$; $\quad f'''(x)=\dfrac{2!}{(1+x)^3}$, $\quad f'''(0)=2!$;

$f^{iv}(x)=-\dfrac{3!}{(1+x)^4}$, $\quad f^{iv}(0)=-3!$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … … …

$$f^n(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

ম্যাকলরিনের সূত্র অনুসারে $\ln(1+x)=0+x.1+\dfrac{x^2}{2!}(-1)+\dfrac{x^3}{3!}.2!+\dots\dots=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dots\dots$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots\dots\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\dots\dots\dots\infty$$

এই ধারা শুধু $-1<x\le 1$ এর জন্য খাটে।

প্রশ্নমালা III B

1. ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে a^x-এর অনন্ত ধারায় বিস্তৃতি নির্ণয় কর ।
[ঢা. বো. ২০১১, ২০০৪, ২০০২; রা. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৪, ২০০১; চ. বো. ২০১১, ২০০৪; ব. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৪; সি. বো. ২০১১, ২০০৪; কু. বো. ২০০৯, ২০০৫, ২০০০; য. বো. ২০০৯, ২০০৪; মা. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০৪, ২০০২]

2. ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\tan^{-1}x$-এর অনন্ত ধারায় সম্প্রসারণ কর । [রা. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৬; কু. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৫; দি. বো. ২০১১, ২০০৯; ঢা. বো. ২০১০, ২০০৫; য. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০৫, ২০০০; ব. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০২; সি. বো. ২০০৯, ২০০৭, ২০০৩; চ. বো. ২০০৬; মা. বো. ২০১০, ২০০৮]

3. $\dfrac{1}{1+x}$-কে x-এর ঊর্ধ্বক্রমিক ঘাতে অনন্ত ধারায় সম্প্রসারণ কর।
[দি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৬, ২০০১; ঢা. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০৫, ২০০১]

ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে নিচের ফাংশনগুলি অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর ঃ

4. $\ln(1-x)$ [য. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০৫, ২০০২; দি. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৬; ব. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৯, ২০০৫; রা. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০৬; মা. বো. ২০০৯]

5. $(1+x)^n$ [দি. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৭, ২০০২ ; য. বো. ২০০৩]

6. e^{mx} [ঢা. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০২; ব. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০৭ য. বো. ২০০৬, ২০০২; সি. বো. ২০০৬, ২০০৪; মা. বো. ২০০৫, ২০০০]

7. e^{-2x} [য. বো. ২০১১; সি. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৯]

8. $\sqrt{1+\sin x}$

9. $e^{\cos x}$ [ঢা. বো. ২০০৭]

10. $\cos^2 x$

11. $\sin^2 x$

12. ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\cos x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর।
[ব. বো. ২০১১, ২০০৬, ২০০৩, ২০০১; রা. বো. ২০১০, ২০০৫, ২০০০; য. বো. ২০০৯, ২০০১; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০৪; সি. বো. ২০০৮, ২০০৫, ২০০১; কু. বো. ২০০৬, ২০০৩; মা. বো. ২০০৯, ২০০৭, ২০০৫]

উত্তরমালা

1. $1+x\ \ln(a)+\frac{x^2}{\lfloor 2}\{\ln(a)\}^2+\frac{x^3}{\lfloor 3}\{\ln(a)\}^3+\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \infty$

x-এর সকল মানের জন্য।

2. $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ -1\le x\le 1$

3. $1-x\ +x^2-\ x^3+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ |x|<1$ (অর্থাৎ $-1<x<1$)

4. $-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots -1\le x<1$

5. $1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+x^n$, যখন n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা

বা, $1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)\ (n-2)}{3!}x^3+\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

যখন $-1<x<1$

6. $1+mx+\frac{m^2x^2}{2!}+\frac{m^3x^3}{3!}+\ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \infty$

7. $1-2x+\frac{2^2}{2!}x^2-\frac{2^3}{3!}x^3+\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \infty$

8. $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{x^2\,2!}-\frac{x^3}{2^3\,3!}+\frac{x^4}{2^4\,4!}+\frac{x^5}{2^5\,5!}-\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \infty$

9. $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\right)$

10. $1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \infty$

11. $\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \infty$

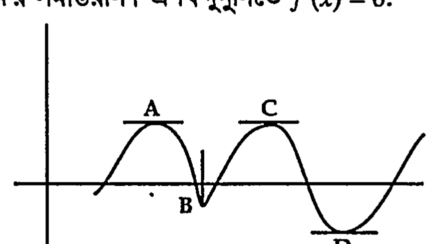
12. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

অন্তরকের প্রয়োগ
Application of the Derivative

34. স্পর্শক (Tangent)

17নং অনুচ্ছেদ থেকে এটি স্পষ্ট যে $x=x_1$-এ যদি $f(x)$-এর অন্তরক $f'(x_1)$ হয়, তবে $y=f(x)$ বক্ররেখাটির $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল হবে $f'(x_1)$। সুতরাং $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে $y=f(x)$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ হবে $y-y_1=f'(x_1)\ (x-x_1)$

যদি $f'(x_1)=0$ হয়, তবে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে, $y=y_1$, যা x-অক্ষের সমান্তরাল। চিত্রে, A, C এবং D বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সমান্তরাল। এ বিন্দুগুলিতে $f'(x)=0$.



দ্রষ্টব্য ঃ y-অক্ষের সমান্তরাল স্পর্শকের জন্য $\frac{dx}{dy}=0$ হবে।

35. অভিলম্ব

স্পর্শবিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত এবং স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শকের লম্ব সরলরেখাটিকে ঐ বিন্দুতে $y = f(x)$ বক্ররেখার অভিলম্ব বলা হয়।

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

বা, $(x - x_1) + f'(x_1)(y - y_1) = 0$

উদাহরণমালা

উদা. 1. $y = x^3 - 2x^2 + 4$ বক্ররেখার $(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৩]

$y = x^3 - 2x^2 + 4$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$; $(2, 4)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 12 - 8 = 4$

সুতরাং $(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$y - 4 = 4(x - 2)$

বা, $y - 4 = 4x - 8$

বা, $4x - y - 4 = 0$

ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $(x - x_1) + f(x_1)(y - y_1) = 0$

$(x - 2) + 4(y - 4) = 0$

বা, $x + 4y - 18 = 0$

উদা. 2. $y = 2x^3 - 15x^2 + 34x - 20$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক $y + 2x = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল, সে সমস্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$y = 2x^3 - 15x^2 + 34x - 20$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 30x + 34$

যেহেতু, স্পর্শকগুলি $y + 2x = 0$ রেখার সমান্তরাল, অতএব তাদের ঢাল $= -2$

$\therefore \quad 6x^2 - 30x + 34 = -2$

বা, $6x^2 - 30x + 36 = 0$

বা, $x^2 - 5x + 6 = 0$

বা, $(x - 3)(x - 2) = 0, \quad x = 3, 2$

যখন, $x = 3, \; y = 2(3)^3 - 15(3)^2 + 34(3) - 20$

$= 54 - 135 + 102 - 20 = 1$

যখন, $x = 2, \; y = 2(2)^3 - 15(2)^2 + 34(2) - 20 = 16 - 60 + 68 - 20 = 4$

অতএব, বিন্দুগুলি $(3, 1)$ এবং $(2, 4)$.

উদা. 3. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

যেহেতু, স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল, অতএব, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

বা, $x^2 - 2x - 3 = 0$

বা, $(x - 3)(x + 1) = 0, \; x = 3, -1$

যখন, $x = 3, \quad y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 15$
$= 27 - 27 - 27 + 15 = -12$

যখন, $x = -1, y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 15$
$= -1 - 3 + 9 + 15 = 20$

নির্ণেয় বিন্দু দুইটি $(3, -12)$ এবং $(-1, 20)$

উদা. 4. $y^2 = x^2 (a - x)$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$$y^2 = x^2 (a - x) = ax^2 - x^3$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2ax - 3x^2 \quad \text{বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 3x^2}{2y} \text{ বা, } \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2ax - 3x^2}$$

যেহেতু, স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল সুতরাং, $\frac{dx}{dy} = 0$

তাহলে, $y = 0$

অতএব, $(a - x)x^2 = 0 \quad \therefore x = 0, a$

নির্ণেয় বিন্দু $(0, 0)$ এবং $(a, 0)$

উদা. 5. $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০২; ঢা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০১০, ২০০৫]

$x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$-কে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$3x^2 + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - 6x + 4 + 5\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $\frac{dy}{dx}(2xy + 5) = -3x^2 - y^2 + 6x - 4$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - y^2 + 6x - 4}{2xy + 5}$

$(1, -1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$-এর মান $\frac{dy}{dx} = \frac{-3 - 1 + 6 - 4}{-2 + 5} = -\frac{2}{3}$

$\therefore$ $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $(y + 1) = -\frac{2}{3}(x - 1)$

বা, $3y + 3 = -2x + 2$

বা, $2x + 3y + 1 = 0$

অভিলম্বের সমীকরণ, $(x-1)-\frac{2}{3}(y+1)=0$

বা, $3x-3-2y-2=0$

বা, $3x-2y-5=0$

প্রশ্নমালা III C

1. $y=4x^2$ পরাবৃত্তের $(-1, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. $(-1, 1)$ বিন্দুর মধ্য দিয়ে, $xy=1$ অধিবৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. $x^2-y^2=7$ বক্ররেখার $(4, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৬; মা. বো. ২০০১]

4. $(2, -2)$ বিন্দুর মধ্য দিয়ে, $x^2-y^2=16$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. (i) দেখাও যে $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার যে কোনো স্পর্শক কর্তৃক অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল একটি ধ্রুবক। [কু. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০২]

(ii) দেখাও যে $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ বক্ররেখার যে কোনো স্পর্শক কর্তৃক অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের বর্গের যোগফল একটি ধ্রুবক।

6. নিচের বক্ররেখাগুলির (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর ঃ

(i) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$ (ii) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (iii) $x^3-3axy+y^3=0$

7. $y=4x^3+3x^2-6x+1$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০০]

8. $x^2+2ax+y^2=0$ বক্ররেখাটির উপর এমন বিন্দুগুলি নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকসমূহ x-অক্ষের উপর লম্ব হয়। [ব. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০৪, ২০০২; য. বো. ২০০৮, ২০০৩; চ. বো. ২০০৬; কু. বো. ২০০৬; সি. বো. ২০০২; মা. বো. ২০১১, ২০০৭]

9. $x^2+y^2-2x-3=0$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৯]

10. $y=x^2+\sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখাটির উপর যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১১, ২০০৭; ঢা. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০৩; ব. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৯; মা. বো. ২০০১]

11. a-এর মান কত হলে, $y=ax(1-x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। [য. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৪; সি. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০১; রা. বো. ২০০৯, ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৬, ২০০৪; ব. বো. ২০০৪; কু. বো, ২০০১; মা. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০০]

12. $y=(x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলিতে তার স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০১০; কু. বো. ২০১০, ২০০৫]

13. $x^3-3xy+y^3=3$ বক্ররেখাটি $(2, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। উক্ত বিন্দুতে তার স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৩]

14. c-এর মান কত হলে $y=cx(1+x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে তার স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করবে ? [ব. বো. ২০০৮, ২০০৬; য. বো. ২০০৭ ; কু. বো. ২০০৬, ২০০২]

15. $x^2+4y^2=8$ উপবৃত্তের যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০১১, ২০০৪, ২০০২; দি. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৬; ব. বো. ২০০৫; রা. বো. ২০০৪, ২০০২]

16. $y^3=x^2(2a-x)$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল সে সমস্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৯]

17. $y = (x-3)^2 (x-2)$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৫]

18. দেখাও যে, $3x + 2y = 0$ এবং $2x + 5y = 0$ রেখা দুইটি $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 4 = 0$ বক্ররেখাকে যে সমস্ত বিন্দুতে ছেদ করে ঐ সমস্ত বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক স্থানাঙ্কের অক্ষগুলির সমান্তরাল।

19. $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

20. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2$ বক্ররেখাটির উপর এমন সকল বিন্দু নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সাথে $\frac{\pi}{4}$ কোণ উৎপন্ন করে।

21. $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলি অক্ষ দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভুজ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১; দি. বো. ২০১০; রা, বো, ২০০৮; সি. বো. ২০০৮, ২০০৪; কু. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০২ ; য. বো. ২০০৩, ২০০১; মা. বো. ২০০৫]

22. $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১০, ২০০৫; য. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০২]

23. $y\ (x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১; য. বো. ২০১০, ২০০০; চ. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৯]

উত্তরমালা

1. $y + 8x + 4 = 0, \quad 8y - x - 33 = 0$

2. $y = (2\sqrt{2} - 3)x + 2\sqrt{2} - 2, \quad y = -(2\sqrt{2} + 3)x - 2\sqrt{2} - 2$

3. $4x + 3y = 7\ ;\ 3x - 4y = 24$ 4. $5x - 3y = 16.$

6. (i) $\frac{xx_1^{-\frac{1}{3}}}{a^{2/3}} + \frac{yy_1^{-\frac{1}{3}}}{b^{2/3}} = 1$ (ii) $xx_1^{-\frac{1}{3}} + yy_1^{-\frac{1}{3}} = a^{2/3}$

(iii) $x\,(x_1^2 - ay_1) - y\,(ax_1 - y_1^2) = ax_1y_1$

7. $(-1, 6)\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ 8. $(0, 0), (-2a, 0)$ 9. $(1, 2)\ , (1, -2)$

10. $(1, 1), (-1, 1)$ 11. $\sqrt{3}$ 12. $8, -4, 8$

13. 3 14. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 15. $(2\sqrt{2},\ 0), (-2\sqrt{2}, 0)$

16. $\left(\frac{4}{3}a, \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}a\right)$, $(0, 0)$ 17. $(3, 0)\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$

19. $\left(3, -\frac{3}{2}\right), \left(-3, \frac{3}{2}\right); \left(6, -\frac{3}{4}\right), \left(-6, \frac{3}{4}\right)$ 20. $\left(1, \frac{7}{3}\right), \left(-1, \frac{5}{3}\right)$

21. $1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm 2/\sqrt{3}$ 22. $(1, 0)\ , (-1, 4)$

23. $x - 20y - 7 = 0, 20x + y - 140 = 0$.

36. পরিবর্তনের হার হিসেবে অন্তরক (The derivative as a rate of change)

অন্তরকের আর একটি উল্লেখযোগ্য দিক হচ্ছে যে অন্তরককে পরিবর্তনের হার পরিমাপক হিসেবেও ব্যবহার করা যায়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যদি t সময়ে কোনো চলমান বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্ব s হয় তবে s, t-এর একটি ফাংশন অর্থাৎ, $s = f(t)$.

যদি $t + \delta t$ সময়ে s-এর মান $s + \delta s$ হয়, তবে δt সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব হয় δs।

অতএব, $\lim\limits_{\delta t \to 0} \dfrac{\delta s}{\delta t}$, চলমান বিন্দু কর্তৃক সেই মুহূর্তে একক সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্বকে বোঝায়। কিন্তু সংজ্ঞানুসারে $\lim\limits_{\delta t \to 0} \dfrac{\delta s}{\delta t} = \dfrac{ds}{dt}$; সুতরাং, $\dfrac{ds}{dt}$ প্রকৃতপক্ষে সময়ের সাপেক্ষে দূরত্ব পরিবর্তনের হার অর্থাৎ চলমান বিন্দুটির গতিবেগ। অনুরূপভাবে, $\dfrac{dv}{dt}$ সময়ের সাপেক্ষে গতিবেগের পরিবর্তনের হার অর্থাৎ ত্বরণ।

সাধারণভাবে, যদি y, x-এ ফাংশন হয় অর্থাৎ $y = f(x)$ হয় তবে $\dfrac{dy}{dx}$, x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার।

উদা. 1. কোনো গতিশীল কণার t সময়ে একটি সরলরেখার উপর দূরত্ব s-কে $s = at^2 + bt + c$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে a, b, c ধ্রুবক। যদি t সময় পরে কণাটির বেগ v হয়, তবে দেখাও যে, $4a(s - c) = v^2 - b^2$. [দি. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০৫, ২০০০]

$s = at^2 + bt + c$

$\dfrac{ds}{dt} = 2at + b$ বা, $v = 2at + b$

$\therefore\ v^2 = 4a^2t^2 + 4at\,b + b^2$

বা, $v^2 - b^2 = 4a(at^2 + bt) = 4a(s - c)$

উদা. 2. যদি একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল সমহারে বাড়ে, তবে দেখাও যে, তার পরিসীমা ব্যাসার্ধের ব্যস্ত অনুপাতে বাড়ে।

t যে কোনো সময়ে মনে করি A বৃত্তের ক্ষেত্রফল, P পরিসীমা এবং r ব্যাসার্ধ।

তবে, $A = \pi r^2$ এবং $P = 2\pi r$ $\therefore P^2 = 4\pi^2 r^2 = 4\pi A$

t-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2P \cdot \frac{dP}{dt} = 4\pi \frac{dA}{dt}$$

বা, $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{2\pi}{P} \cdot \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{dA}{dt}$

কিন্তু, $\dfrac{dA}{dt}$ একটি ধ্রুবক ;

অতএব, $\dfrac{dP}{dt} \propto \dfrac{1}{r}$. অর্থাৎ, পরিসীমা ব্যাসার্ধের ব্যস্ত অনুপাতে বাড়ে।

উদা. 3. ধাতুর তৈরি একটি বৃত্তাকৃতি থালার ব্যাসার্ধ, তাপ প্রয়োগের ফলে, প্রতি সেকেন্ডে 0·25 সে. মি. বাড়ে। যখন থালাটির ব্যাসার্ধ 7 সে. মি. তখন তার তলের বৃদ্ধির হার নির্ণয় কর।

মনে করি থালাটির ব্যাসার্ধ r এবং তল A.

$\frac{dr}{dt} = \cdot 25$ এবং $A = \pi r^2$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$= 2 \times 3\cdot 14 \times 7 \times \cdot 25 = 10\cdot 99$$

$= 11$ (প্রায়)

অতএব, থালাটির তলের বৃদ্ধির হার প্রতি সেকেন্ডে 11 বর্গ সে. মি.(প্রায়)।

প্রশ্নমালা III D

1. একটি বস্তু কণা কোনো সরলরেখা বরাবর এমনভাবে চলছে যেন t সময়ে এর অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 3\cdot 8t + \frac{1}{2}(3t^2)$; দেখাও যে, তার ত্বরণ স্থির রাশি এবং তার মান নির্ণয় কর।

2. একটি পাথরের টুকরা 112 ফুট/সেকেন্ড বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। t সময়ে এর গতি সমীকরণ $s = 112t - 16t^2$ রূপে প্রকাশিত হলে, যে সময়ে (i) এর বেগ 80 ফুট/সেকেন্ড হয়, (ii) পাথরটি তার উচ্চতম বিন্দুতে পৌঁছে তা নির্ণয় কর।

3. একটি গতিশীল কণার কোনো সরলরেখায় t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 63t - 6t^2 - t^3$ দ্বারা প্রকাশিত হয়। 2 সেকেন্ড শেষে তার বেগ এবং কণাটি থামার পূর্বে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। **[সি. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০২]**

4. একটি বিন্দু সরলরেখায় এমনভাবে চলে যেন $s = \sqrt{t}$ হয় ; দেখাও যে, বিন্দুটির ত্বরণ ঋণাত্মক এবং বেগের ঘনফলের সাথে সমানুপাতিক।

5. যদি কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে, তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধি হার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে। **[দি. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৬; কু. বো. ২০০৪; য. বো. ২০০২]**

6. দেখাও যে, একটি গোলাকার সাবানের বুদবুদের আয়তনের বৃদ্ধি হার তার ব্যাসার্ধের বৃদ্ধি হারের $4\pi r^2$ গুণ।

7. যদি কোনো সমবাহু ত্রিভুজের বাহু প্রতি সেকেন্ডে $\sqrt{3}$ সে. মি. এবং ক্ষেত্রফল প্রতি সেকেন্ডে 12 বর্গ সে. মি. বৃদ্ধি পায় তবে সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

8. একটি কণার সরলরৈখিক গতিতে দূরত্ব $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সমীকরণ দ্বারা ব্যক্ত করা হয় যেখানে u এবং f ধ্রুবক ; দেখাও যে t সময়ে তার বেগ $u + ft$ এবং ত্বরণ f.

9. একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $3t + \frac{1}{8}t^2$ মিটার অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর তার বেগ কত হবে ?

[কু. বো. ২০১১, ২০০৫; রা. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৭ ; চ. বো. ২০০৭ ; ঢা. বো. ২০০৬]

উত্তরমালা

1. 3

2. (i) 1 সেকেন্ড (ii) $3\frac{1}{2}$ সেকেন্ড

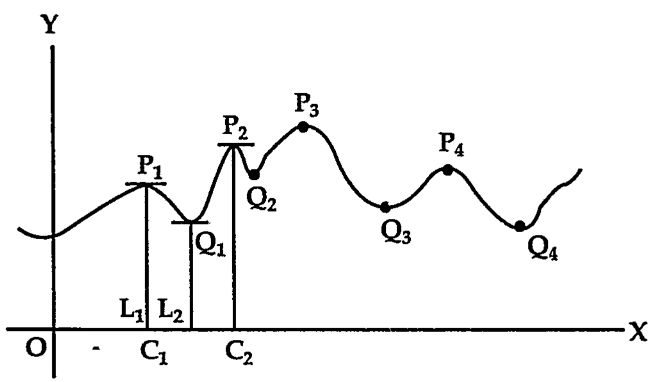
3. (i) 27 ফুট/সে. (ii) 108 ফুট

7. 8 সে. মি.

9. 78 মিটার/সেকেন্ড

37. ফাংশনের চরম মান (Extreme values of functions)

$y = f(x)$ অবিচ্ছিন্ন ফাংশনটির লেখচিত্র থেকে আমরা দেখতে পাই যে, P_1 বিন্দুর ডান ও বাম দিকে একটি ক্ষুদ্র ব্যবধি L_1L_2-এর অন্তর্গত x-এর সকল মানের মধ্যে $x = OC_1 = c$-এর জন্য $f(x) = f(c)$-এর মান বৃহত্তম।



অনুরূপভাবে, P_2, P_3, P_4 বিন্দুগুলিতেও বিন্দুগুলির উভয় দিকে x-এর মানসমূহের একটি ক্ষুদ্র ব্যবধির মধ্যে x-এর একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য $f(x)$-এর মান বৃহত্তম।

অতএব, কোনো বিন্দুতে $f(x)$-এর মান বৃহত্তম— এর অর্থ এই নয় যে, ফাংশনটির মান সে বিন্দুতে চূড়ান্তভাবে বৃহত্তম (absolutely maximum) ফাংশনটির ক্ষুদ্রতম মানও একইভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। কোনো বিন্দুতে একটি ফাংশনের মান ক্ষুদ্রতম—এর অর্থ এই নয় যে বিন্দুটিতে ফাংশনটির মান চূড়ান্তভাবে ক্ষুদ্রতম (absolutely minimum)। লক্ষ করলে আরও দেখা যাবে যে, কোনো বিন্দুতে ফাংশনটির ক্ষুদ্রতম মান আর একটি বিন্দুতে ফাংশনটির বৃহত্তম মানের চেয়ে বৃহত্তর। সুতরাং, একটি ফাংশনের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানগুলি প্রকৃতপক্ষে আপেক্ষিকভাবে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান। ফাংশনের আপেক্ষিক বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানগুলিকে ফাংশনের গুরুমান ও লঘুমান এবং এদের একত্রে ফাংশনের চরম মান বলা হয়। অর্থাৎ আপেক্ষিক বৃহত্তম মান ও আপেক্ষিক ক্ষুদ্রতম মান বুঝাতে আমরা 'গুরুমান' ও 'লঘুমান' অভিধা ব্যবহার করব।

আমরা নিচের ফলগুলি পাই ঃ

(i) একটি ফাংশনের একাধিক গুরুমান ও লঘুমান থাকতে পারে।

(ii) কোনো বিন্দুতে ফাংশনের লঘুমান অন্য একটি বিন্দুতে ফাংশনটির গুরু মানের চেয়ে বড় হতে পারে।

38. ফাংশনের গুরুমান ও লঘুমান (Maxima and Minima of functions)

$x = c$-তে ফাংশনটির গুরুমান অথবা লঘুমান থাকলে এবং $f'(c)$ অস্তিত্বশীল হলে $f'(c) = 0$ হবে।

অতএব, $f(x)$-এর গুরুমান অথবা লঘু মান নির্ণয় করার জন্য (i) $f'(x) = 0$ ধরে x-এর মান/মানসমূহ নির্ণয় করতে হবে। মনে করি x-এর মানগুলি $c_1, c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots$

(ii) $f''(x)$-এ, $x = c_1$ বসাই। যদি $f''(c) < 0$ হয় তবে $x = c_1$-এর জন্য ফাংশনটির মান গুরুমান। $f''(c_1) > 0$ হলে $x = c_1$-এর জন্য ফাংশনটির মান লঘুমান হবে। একই প্রক্রিয়া $x = c_2, c_3 \ldots\ldots\ldots$ এর জন্য প্রয়োগ করতে হবে।

উদা. 1. x-এর মান কত হলে $x(12-2x)^2$ গুরুমান অথবা লঘুমান হবে ?

$$y = x(12-2x)^2 = 4x(6-x)^2 = 4x(x^2-12x+36)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 4(x^2-12x+36) + 4x(2x-12)$$

$$= 4x^2 - 48x + 144 + 8x^2 - 48x$$

$$= 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2-8x+12)$$

$$= 12(x-6)(x-2)$$

ফাংশনটির গুরুমান ও লঘুমানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$

বা, $12(x-6)(x-2) = 0 \quad x = 6, 2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12[x-2+x-6] = 12(2x-8) = 24(x-4)$$

$x = 2$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24(2-4) = -48 < 0$

অতএব, $x = 2$-তে ফাংশনটির মান গুরুমান।

$x = 6$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24(6-4) = 48 > 0$

অতএব, $x = 6$-তে ফাংশনটি লঘুমান।

উদা. 2. গুরুমান ও লঘুমানগুলি নির্ণয় কর : $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x, \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

[ঢা. বো. ২০০৮, ব. বো. ২০০১]

$f(x) = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x \quad f'(x) = 2\cos x - 6\sin x\cos x$

গুরুমান ও লঘু মানের জন্য $f'(x) = 0$

$\therefore \quad 2\cos x - 6\sin x \cos x = 0$

বা, $2\cos x(1-3\sin x) = 0 \;\therefore\; \cos x = 0, \sin x = \frac{1}{3}$

$f''(x) = -2\sin x - 6\cos^2 x + 6\sin^2 x = -2\sin x - 6(\cos^2 x - \sin^2 x)$

যখন, $\cos x = 0, \sin x = 1$

$\therefore \quad f''(x) = -2 + 6 = 4 > 0$, ফাংশনের মান লঘুমান।

অতএব, ফাংশনের লঘুমান $= 1 + 2(1) + 3(0)^2 = 3.$

যখন, $\sin x = \frac{1}{3} \quad f''(x) = -2\sin x - 6(1-2\sin^2 x) = -\frac{2}{3} - 6\left(1-\frac{2}{9}\right) < 0$

অতএব, $\sin x = \frac{1}{3}$ এর জন্য $f(x)$-এর মান গুরুমান

অতএব, $f(x)$-এর গুরুমান $= 1 + 2.\frac{1}{3} + 3\left(1-\frac{1}{9}\right) = 4\frac{1}{3}$

উদা. 3. দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$ -এর কোনো গুরুমান অথবা লঘুমান নেই। [য. বো. ২০১১, ২০০১]

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 24 = 3(x^2 - 4x + 8) = 3\{(x-2)^2 + 4\}$

$f'(x)$ কখনো শূন্য হতে পারে না। অতএব ফাংশনটির কোনো বৃহত্তম অথবা ক্ষুদ্রতম মান নেই।

প্রশ্নমালা III E

1. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$-এর গুরুমান এবং লঘুমান নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৩]

2. x-এর কোন্ মানের জন্য নিচের ফাংশনগুলির গুরুমান ও লঘুমান পাওয়া যায় ?

(i) $4x^3 - 15x^2 + 12x - 2$ (ii) $\frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$ [য. বো. ২০০৭] (iii) $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$ [কু. বো. ২০০৪]

3. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$-এর গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১০]

4. দেখাও যে, $x + \frac{1}{x}$-এর গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

[ঢা. বো. ২০১১, ২০০৫; য. বো. ২০১০; চ. বো. ২০১০; সি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৮, ২০০৩; রা. বো. ২০০৬, ২০০২]

5. $x(12 - 2x)^2$-এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৫]

6. $x^3 - 6x^2 + 9x - 8$-এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ এর কোনো বৃহত্তম অথবা ক্ষুদ্রতম মান নেই।

[ব. বো. ২০১১; সি. বো. ২০০৯, ২০০৩ ; য. বো. ২০০৬]

8. দেখাও যে, (i) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x$ বৃহত্তম হবে যদি $x = \frac{\pi}{6}$ হয়।

(ii) $x\sin x + 4\cos x$ বৃহত্তম হবে যদি $x = 0$ হয়। (iii) $\sin x(1 + \cos x)$ বৃহত্তম হবে যদি $x = \frac{\pi}{3}$ হয়।

9. দেখাও যে, (i) $\frac{x}{\ln x}$-এর ক্ষুদ্রতম মান e ; [কু. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৭]

(ii) $4e^x + 9e^{-x}$ এর ক্ষুদ্রতম মান 12. [কু. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০, ২০০৫; রা. বো. ২০০৮, ২০০৩]

10. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$-এর গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৪; য. বো. ২০০৯, ২০০০; রা. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৩]

11. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$-এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০১১, ২০০৯; রা. বো. ২০১০, ২০০৫; ব. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৩ ; কু. বো. ২০০০; মা. বো. ২০১১, ২০০৮]

উত্তরমালা

1. $\frac{43}{2}, \frac{2}{3}$ 2. (i) $x = \frac{1}{2}$ (গুরুমানের জন্য) $x = 2$ (লঘুমান)

(ii) $x = 4$ (গুরুমান), $x = 16$ (লঘুমান)

(iii) $x = 1$ (লঘুমান), $x = 2$ (গুরুমান), $x = 3$ (লঘুমান)

3. গুরুমান $\frac{81}{16}$, লঘুমান 0

5. বৃহত্তম মান 128, ক্ষুদ্রতম মান 0

6. বৃহত্তম -4, ক্ষুদ্রতম -8

10. গুরুমান -3, লঘুমান -128

11. লঘুমান -162, গুরুমান 94.

চতুর্থ অধ্যায়

যোগজীকরণ

INTEGRATION

39. প্রতিঅন্তরক হিসেবে যোগজ (The integral as an anti-derivative)

$F(x)$ ফাংশনটির অন্তরক $F'(x) = f(x)$ অর্থাৎ $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$ হলে, $F(x)$ ফাংশনটিকে $f(x)$-এর প্রতিঅন্তরক (anti-derivative) অথবা অনির্দিষ্ট যোগজ (Indefinite integral) বলা হয়। কোনো ফাংশনের অনির্দিষ্ট যোগজ অনন্য নয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় x^2, $x^2 + 5$ এবং $x^2 - 4$ প্রতিটি রাশি $f(x) = 2x$-এর অনির্দিষ্ট যোগজ। $f(x) = 2x$-ফাংশনটির অনির্দিষ্ট যোগজের সেটটিকে লিখা হয় $F(x) = x^2 + C$, যেখানে C একটি ইচ্ছামূলক ধ্রুবক (যোগজীকরণের ধ্রুবক)।

$f(x)$-এর অনির্দিষ্ট যোগজ প্রকাশ করার জন্য $\int f(x)\,dx$ সংকেতটি ব্যবহৃত হয়। অতএব, $\int 2x\,dx = x^2 + C$; $\int f(x)\,dx$ রাশিমালায় $f(x)$-কে যোজ্য রাশি (integrand) বলে। $\int$ প্রতীকটি একটি লম্বা S যা Summation শব্দটির প্রথম অক্ষরের দীর্ঘায়িত রূপ। dx-এর অর্থ হচ্ছে $f(x)$-কে x-এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ করা হয়েছে।

40. কতিপয় প্রমিত ফাংশনের যোগজ

যোগজীকরণ প্রক্রিয়া অন্তরীকরণ প্রক্রিয়ার বিপরীত এবং এ দুইটির মধ্যে সম্পর্ক দেখানোর জন্য নিচে কতগুলি ফাংশনের অন্তরক এবং যোগজ দুইই দেয়া হলো।

(i) $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$; $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq -1)$

(ii) $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$; $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$, $x \neq 0$

(iii) $\frac{d}{dx} e^{mx} = m\, e^{mx}$; $\int e^{mx}\, dx = \frac{1}{m} e^{mx}$

(iv) $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$; $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$

(v) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$; $\int \cos x\, dx = \sin x$

(vi) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$; $\int \sin x\, dx = -\cos x$

(vii) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$; $\int \sec^2 x\, dx = \tan x$

(viii) $\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$; $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x$

(ix) $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$; $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x$

(x) $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$; $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x$

41. যোগজের যোগাশ্রয়ী ধর্ম

মনে করি $\int f_1(x)\,dx = F_1(x)$ এবং $\int f_2(x)\,dx = F_2(x)$

তাহলে, $\frac{d}{dx}[F_1(x) + F_2(x)] = \frac{d}{dx}F_1(x) + \frac{d}{dx}F_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$

অতএব, যোগজের সংজ্ঞা থেকে পাই,

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = F_1(x) + F_2(x) = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

অনুরূপভাবে,

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) + \dots \dots \dots + f_n(x)]\,dx$$

$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx + \dots \dots \dots + \int f_n(x)\,dx$$

একটি ধ্রুবক ও একটি ফাংশনের গুণফলের যোগজ

মনে করি $\int f(x)\,dx = F(x)$ তাহলে, $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$

যেহেতু $\frac{d}{dx}[a\,F(x)] = a\frac{d}{dx}F(x) = af(x)$

অতএব, যোগজের সংজ্ঞা থেকে পাই,

$$\int [af(x)]\,dx = aF(x) = a\int f(x)\,dx$$

অর্থাৎ, কোনো একটি ধ্রুবক ও ফাংশনের গুণফলের যোগজ, ঐ ধ্রুবক এবং ঐ ফাংশনের যোগজের গুণফলের সমান হবে।

উদাহরণ ঃ নিচের ফাংশনগুলির যোগজ নির্ণয় কর ঃ

(i) $\int 4x^3\,dx$ (ii) $\int \frac{3}{y^{2\cdot5}}\,dy$ (iii) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$ (iv) $\int \frac{t^5 - 3t^3 + 5t}{t^3}\,dt$

(v) $\int x(1 + \sqrt{x})\,dx$ [য. বো. ২০০৪] (vi) $\int \frac{y^3 - 8}{y - 2}\,dy$ (vii) $\int \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

(viii) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}\,dx$ (ix) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$ [কু. বো. ২০০৮]

(i) $\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx = 4 \times \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = x^4 + C$

(ii) $\int \frac{3}{y^{2\cdot5}}\,dy = 3\int y^{-2\cdot5}\,dy = 3 \times \frac{y^{-2\cdot5+1}}{-2\cdot5+1} + C$

$$= 3 \times \frac{y^{-1\cdot5}}{-1\cdot5} + C = -\frac{3 \times 10}{15} y^{-1\cdot5} + C$$

$$= -\frac{2}{y^{1\cdot5}} + C$$

(iii) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{-\frac{1}{3}}dx \quad =\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$

(iv) $\int \frac{t^5-3t^3+5t}{t^3}dt=\int t^2dt-\int 3dt+\int 5t^{-2}dt$

$=\frac{t^3}{3}-3t+5\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{3}t^3-3t-\frac{5}{t}+C$

(v) $\int x(1+\sqrt{x})\,dx \quad =\int xdx+\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C$

$=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

(vi) $\int \frac{y^3-8}{y-2}dy \quad =\int\frac{(y-2)\,(y^2+2y+4)}{(y-2)}dy=\int(y^2+2y+4)dy$

$=\frac{y^3}{3}+\frac{2y^2}{2}+4y+C=\frac{1}{3}y^3+y^2+4y+C$

(vii) $\int \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x}}dx \quad =\int\frac{x^2-6x+9}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{3}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}+9x^{-\frac{1}{2}})\,dx$

$=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-6\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+9\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{3}{2}}+18x^{\frac{1}{2}}+C$

(viii) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx \quad =\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}dx=\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int dx=x+C$

(ix) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}=\int\frac{dx}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}\int\sec^2 x\,dx=\frac{1}{2}\tan x+C$

প্রশ্নমালা IV A

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর :

1. $\int x^6\,dx$
2. $\int 5x^{14}\,dx$
3. $\int\frac{6}{11}x\,dx$
4. $\int 15y^2dy$
5. $\int \frac{dx}{3}$
6. $\int dt$
7. $\int(3x^2-5x^3)dx$
8. $\int(x-5)\,(x+5)\,dx$

9. $\int \frac{dx}{x^2}$

10. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

11. $\int \frac{1}{3\sqrt{x}} dx$

12. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

13. $\int \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c\right) dx$

14. $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

15. $\int \frac{z^5 - 2z}{z^3} dz$

16. $\int (x^3 - 5e^x + 3\sin x)\, dx$

17. $\int \left(5x^{-0\cdot5} - \frac{\pi}{2}\right) dx$

18. $\int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx$

19. $\int \frac{x^3 - 3}{\sqrt{x}} dx$

20. $\int (3\cos x - 5\sec^2 x + 7)\, dx$

21. $\int \frac{3\cdot5}{x} dx$

22. $\int \left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

23. $\int (\sec x \tan x - 3\,\text{cosec}^2 x)\, dx$

24. $\int \tan^2 x\, dx$ [কু. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৫]

25. $\int \cot^2 x\, dx$

26. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{2}\cot x} dx$

27. $\int \frac{\sin x + \text{cosec}\, x}{5\tan x} dx$

28. $\int \sec x(\sec x - \tan x)\, dx$

29. $\int \frac{3\sec x - 2\cos x}{6\cot x} dx$

30. $\int \frac{a\cot x + b\tan^2 x - c\sin^2 x}{\sin x} dx$

31. $\int \sqrt{(1 - \sin 2x)}\, dx$

32. $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$ [য. বো. ২০০৩]

33. $\int \sec^2 x\,\text{cosec}^2 x\, dx$ [কু. বো. ২০১১, ২০০৫; দি. বো. ২০১১; রা. বো. ২০১০, ২০০৮; সি. বো. ২০১০, ২০০৪; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৭; ব. বো. ২০০৯, ২০০৪; চ. বো. ২০০৮, ২০০৩; য. বো. ২০০৭; মা. বো. ২০০৫]

34. $\int \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} dx$

35. $\int \frac{x + 2}{x + 1} dx$

36. $\int \frac{\sin y\, dy}{\cos^2 y}$

37. $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$ [কু. বো. ২০০৮]

38. $\int \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$ [চ. বো. ২০০৯, ২০০৫; ব. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৬]

39. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

উত্তরমালা

[দ্রষ্টব্য ঃ যোগজীকরণের ধ্রুবক সবক্ষেত্রে বাদ দিয়ে লেখা হয়েছে]

1. $\frac{1}{7}x^7$ 2. $\frac{1}{3}x^{15}$ 3. $\frac{3}{11}x^2$

4. $5y^3$ 5. $\frac{1}{3}x$ 6. t

7. $x^3\left(1-\frac{5}{4}x\right)$ 8. $\frac{1}{3}x^3-25x$ 9. $-\frac{1}{x}$

10. $\frac{3}{4}x^{4/3}$ 11. $\frac{2}{3}\sqrt{x}$ 12. $\frac{x^5}{5}+2x-\frac{1}{3x^3}$

13. $-\frac{a}{x}+b\ \ln x+cx$ 14. $\frac{3}{4}x^{4/3}-\frac{3}{2}x^{2/3}$ 15. $\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{z}$

16. $\frac{1}{4}x^4-5e^x-3\cos x$ 17. $10x^{0\cdot5}-\frac{\pi}{2}x$ 18. $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$

19. $2\,x^{1/2}\left(\frac{x^3}{7}-3\right)$ 20. $3\sin x-5\tan x+7x$ 21. $3\cdot5(\ln x)$

22. $x+\frac{1}{9}x^3-x^{1/2}$ 23. $\sec x+3\cot x$ 24. $\tan x-x$

25. $-\cot x-x$ 26. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\tan x-x)$ 27. $\frac{1}{5}(\sin x-\operatorname{cosec} x)$

28. $\tan x-\sec x$ 29. $\frac{1}{2}\sec x+\frac{1}{3}\cos x$ 30. $-a\operatorname{cosec} x+b\sec x+c\cos x$

31. $-(\cos x+\sin x)$ 32. $\tan x-x$ 33. $\tan x-\cot x$

34. $x+\frac{1}{x+1}$ 35. $x+\ln(x+1)$ 36. $\sec y$

37. $\frac{1}{2}\tan x$ 38. $-\sqrt{2}\cos x$ 39. $\frac{1}{2}(x+\sin x)$

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি
Method of Substitution

42. x-এর একঘাতী ফাংশনের ফাংশনসমূহ

$\int f(x)\, dx$ নির্ণয় করার জন্য আমরা প্রদত্ত চলক $x = \phi(u)$ ধরে, x-কে u দ্বারা প্রতিস্থাপন করি।

$x = \phi(u)$, $dx = \phi'(u)\, du$

$$\therefore \quad \int f(x)\, dx = \int f(\phi(u))\, \phi'(u)\, du \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (1)$$

(1)-এর ডানপক্ষ নির্ণয় করে, ফল x-এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। সমীকরণ (1) যাচাই করার জন্য, মনে করি $F(x) = \int f(x)\, dx$, তাহলে,

$$\frac{d}{du}F(x) = \frac{d}{dx}F(x) \cdot \frac{dx}{du} = f(x)\, \phi'(u) = f(\phi(u))\, \phi'(u)$$

$$\therefore \quad F(x) = \int f(\phi(u))\, \phi'(u)\, du$$

$$\therefore \quad \int f(x)\, dx = \int f(\phi(u))\, \phi'(u)\, du.$$

(i) a, b, n প্রতিটি ধ্রুবক এবং $n \neq -1$ হলে, $\int (ax+b)^n\, dx$ নির্ণয় কর।

মনে করি, $ax + b = z \quad \therefore\ x = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$ এবং $dx = \frac{1}{a}dz$

$$\therefore \int (ax+b)^n\, dx = \int z^n \frac{1}{a}\, dz = \frac{1}{a}\int z^n\, dz = \frac{1}{a}\frac{z^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

(ii) $\int \sin(ax+b)\, dx$ নির্ণয় কর।

$ax + b = z$ ধরে পাই,

$$\int \sin(ax+b)\, dx = \int \sin z.\frac{1}{a}\, dz = \frac{1}{a}\int \sin z\, dz = \frac{1}{a}(-\cos z)$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

$b = 0$ হলে, $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax$

(iii) অনুরূপভাবে, $\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$

$b = 0$ হলে, $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax$

উদা. 1. $\int (3x-7)^7\,dx$ নির্ণয় কর।

$$\int (3x-7)^7\,dx = \frac{(3x-7)^8}{3\times 8} = \frac{(3x-7)^8}{24}$$

উদা. 2. $\int \frac{1}{(1-3y)^5}\,dy$ নির্ণয় কর।

$$\int \frac{1}{(1-3y)^5}\,dy = \int (1-3y)^{-5}\,dy = \frac{(1-3y)^{-4}}{(-3)(-4)} = \frac{1}{12(1-3y)^4}$$

উদা. 3. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-6x)}}\,dx$ নির্ণয় কর।

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-6x)}}\,dx = \int (1-6x)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{(1-6x)^{\frac{2}{3}}}{(-6)\left(\frac{2}{3}\right)} = -\frac{1}{4}(1-6x)^{\frac{2}{3}}$$

উদা. 4. $\int \sin^2 4x\,dx$ নির্ণয় কর।

$$\int \sin^2 4x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 8x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 8x}{8}\right) = \frac{1}{16}(8x-\sin 8x)$$

উদা. 5. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৬]

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int (2\sin x\cos x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x$$
$$= \frac{1}{32}(4x-\sin 4x)$$

উদা. 6. $\int 3\sin 3x\cos 4x\,dx$ নির্ণয় কর।

$$\int 3\sin 3x\cos 4x\,dx = \frac{3}{2}\int 2\sin 3x\cos 4x\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\int (\sin 7x-\sin x)\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x+\cos x\right)$$
$$= \frac{3}{14}(7\cos x-\cos 7x)$$

উদা. 7. $\int \sin 4x \sin 2x\, dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০৪]

$$\int \sin 4x \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2 \sin 4x \sin 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 6x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin 6x\right)$$
$$= \frac{1}{12}(3 \sin 2x - \sin 6x)$$

উদা. 8. $\int \sin^3 \theta\, d\theta$ নির্ণয় কর।

$$\int \sin^3 \theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int (3 \sin\theta - \sin 3\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}\left(-3\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right) = \frac{1}{12}\cos 3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta$$

উদা. 9. $\int 3e^{5-3x}\, dx$ নির্ণয় কর।

$$\int 3e^{5-3x}\, dx = \frac{3e^{5-3x}}{-3} = -e^{5-3x}$$

উদা. 10. $\int \frac{dy}{3e^{5y}}$ নির্ণয় কর। $\int \frac{dy}{3e^{5y}} = \frac{1}{3}\int e^{-5y}\, dy = \frac{1}{3}\left(\frac{e^{-y}}{-5}\right) = -\frac{1}{15e^{5y}}$

প্রশ্নমালা IV B

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

1. $\int (3x+4)^5\, dx$ 2. $\int (3-2x)^4\, dx$ 3. $\int \sqrt{(2x+3)}\, dx$

4. $\int \sqrt{\left(1-\frac{x}{2}\right)}\, dx$ 5. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-4x)}}\, dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$

7. (i) $\int \sin 5x\, dx$ [সি. বো. ২০০৫] (ii) $\int 3 \sin x \cos x\, dx$ (iii) $\int \text{cosec}^2 (\alpha - \beta x)\, dx$

8. (i) $\int \sqrt{1+\cos x}\, dx$ (ii) $\int \frac{dx}{1-\sin x}$ [ঢা. বো. ২০০৭]

(iii) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ [রা. বো. ২০১১, ২০১০; য. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০৩]

9. $\int \cos\frac{x}{2}\, dx$ 10. $\int \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) dx$ 11. $\int \cos(\alpha - 5x)\, dx$

12. $\int \sin^2 3\theta\, d\theta$ 13. $\int \cos^2\frac{\theta}{2}\, d\theta$ 14. $\int \sin px \cos qx\, dx, (p > q)$

[সি. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৩]

15. $\int \sin\left(\frac{2}{3}x - 5\right) dx$ 16. $\int 3 \cos 3x \cos x\, dx$ 17. $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$

[য. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৮]

18. $\int 5 \cos 4x \sin 3x\, dx$ [চ. বো. ২০১১; ব. বো. ২০১০, ২০০৬; রা. বো. ২০০৯, ২০০৩; সি. বো. ২০০৯, ২০০৩; দি. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০২]

19. $\int \cos^3 x\, dx$

20. $\int \cos^4 x\, dx$ [সি. বো. ২০০৮, ২০০৪; রা. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০৫]

21. $\int \sin^4 x\, dx$ [কু. বো. ২০০৯]

22. $\int e^{5x}\, dx$

23. $\int 2e^{\frac{1}{3}x}\, dx$

24. $\int e^{3x+2}\, dx$

25. $\int e^{5-7x}\, dx$

26. $\int \frac{dt}{2e^{2t}}$

27. $\int e^{0\cdot 5y}\, dy$

28. $\int a^{4x}\, dx$

29. $\int 10^{3x}\, dx$

30. $\int \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) dx$

31. (i) $\int \frac{3\, dx}{4+5x}$ (ii) $\int \frac{dy}{3-7y}$ (iii) $\int 5(3-x)^{-1}\, dx$

32. (i) $\int \sec^2(3x+2)\, dx$ (ii) $\int \text{cosec}^2\, 5x\, dx$

33. (i) $\int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x-2}\right) dx$ (ii) $\int \sin^2 bx\, dx$ (iii) $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx$

[সি. বো. ২০১১; কু. বো. ২০১০, ২০০৭; চ. বো. ২০০৯, ২০০২; য. বো. ২০০৫]

34. (i) $\int \tan^2 \frac{x}{2} dx$ (ii) $\int \left\{\frac{1}{(a+x)^2} + \frac{1}{(a-x)^2}\right\} dx$

35. (i) $\int \frac{(e^x+1)^2}{\sqrt{e^x}} dx$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ [দি. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০২]

36. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x-3}}$

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{18}(3x+4)^6$

2. $-\frac{1}{10}(3-2x)^5$

3. $\frac{1}{3}(2x+3)^{3/2}$

4. $-\frac{4}{3}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{3/2}$

5. $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-4x)^2}$

6. $-2\sqrt{(1-x)}$

7. (i) $-\frac{1}{5}\cos 5x$ (ii) $-\frac{3}{4}\cos 2x$ (iii) $\frac{1}{\beta}\cot(\alpha-\beta x)$

8. (i) $2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ (ii) $\tan x + \sec x$ (iii) $\tan\frac{x}{2}$

9. $2\sin\frac{x}{2}$

10. $-\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$

11. $-\frac{1}{5}\sin(\alpha-5x)$

12. $\frac{1}{12}(6\theta-\sin 6\theta)$

13. $\frac{1}{2}(\theta+\sin\theta)$

14. $-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(p+q)x}{p+q} + \frac{\cos(p-q)x}{p-q}\right\}$

15. $-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x-5\right)$

16. $\frac{3}{4}\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)$

17. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x$ 18. $\frac{5}{2}\left(\cos x - \frac{1}{7}\cos 7x\right)$

19. $\frac{1}{12}(\sin 3x + 9\sin x)$ 20. $\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right)$

21. $\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right)$ 22. $\frac{1}{5}e^{5x}$

23. $6e^{x/3}$ 24. $\frac{1}{3}e^{3x+2}$ 25. $-\frac{1}{7}e^{5-7x}$ 26. $-\frac{1}{4e^{2t}}$

27. $2e^{0.5y}$ 28. $\frac{a^{4x}}{4\ln a}$ 29. $\frac{10^{3x}}{3\ln 10}$

30. $2(e^{x/2} - e^{-x/2})$

31. (i) $\frac{3}{5}\ln(4+5x)$ (ii) $-\frac{1}{7}\ln(3-7y)$ (iii) $-5.\ln(3-x)$

32. (i) $\frac{1}{3}\tan(3x+2)$ (ii) $-\frac{1}{5}\cos 5x$

33. (i) $\ln\left\{\frac{(x-1)^3}{(x-2)^4}\right\}$ (ii) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4b}\sin 2bx$

(iii) $\frac{1}{4}(\sin 2x - x - \frac{1}{4}\sin 4x)$

34. (i) $2\tan\frac{x}{2} - x$ (ii) $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a+x}$

35. (i) $\frac{2}{3}e^{\frac{3x}{2}} + 4e^{\frac{x}{2}} - 2e^{-\frac{x}{2}}$. (ii) $\frac{1}{3}[(x+1)^{3/2} - (x-1)^{3/2}]$

36. (i) $\frac{2}{3}[x^{3/2} + (x-1)^{3/2}]$ (ii) $\frac{1}{24}[(2x+5)^{3/2} - (2x-3)^{3/2}]$

43. যোগজীয় রাশি যদি x^n-এর ফাংশন ও x^{n-1}-এর গুণফল হয় তবে, $x^n = z$ ধরে তার যোজিত ফল নির্ণয় করা যায়।

উদা. $\int x e^{x^2} dx$ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৩]

মনে করি, $x^2 = z$ $\therefore 2x\,dx = dz$ অথবা, $xdx = \frac{1}{2}dz$

$$\therefore \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^z dz = \frac{1}{2}e^z = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

44. যোজ্য রাশিটি যদি যে কোনো শক্তিবিশিষ্ট ফাংশন ও তার অন্তরকের গুণফল হয়, তবে ফাংশনটির জন্য z ধরে রাশিটির যোগজ নির্ণয় করা যায়।

উদা. $\int \cos^2 x \sin x\,dx$ নির্ণয় কর।

মনে করি $\cos x = z$ $\therefore -\sin x\,dx = dz$

$$\therefore \int \cos^2 x \sin x\,dx = -\int z^2 dz = -\frac{1}{3}z^3 = -\frac{1}{3}\cos^3 x$$

45. (i) প্রমাণ কর ঃ $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \ln f(x)$

মনে করি, $f(x) = z \quad \therefore \; f'(x)\,dx = dz$

$$\therefore \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| = \ln|f(x)|$$

অর্থাৎ, যোজ্য রাশিটির লব, হরের অন্তরক হলে, তার যোগজ হরের লগারিদমের পরম মান হবে।

(ii) প্রমাণ কর ঃ $\int \frac{\frac{1}{2} f'(x)\,dx}{\sqrt{\{f(x)\}}} = \sqrt{\{f(x)\}}$

মনে করি, $\sqrt{\{f(x)\}} = z$, তা হলে, $\frac{\frac{1}{2} f'(x)}{\sqrt{\{f(x)\}}}\,dx = dz$

এখন, $\int \frac{\frac{1}{2} f'(x)\,dx}{\sqrt{\{f(x)\}}} = \int dz = z = \sqrt{\{f(x)\}}.$

উদাহরণমালা

উদা. 1. $\int \tan x\,dx$ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০১]

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$= -\ln\cos x = \ln\sec x$$

উদা. 2. $\int \cot x\,dx$ নির্ণয় কর।

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|$$

উদা. 3. $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$ নির্ণয় কর।

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+1|$$

উদা. 4. নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর

(i) $\int \operatorname{cosec} x\,dx$ [কু. বো. ২০০২] (ii) $\int \sec x\,dx$

(i) $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\,dx$$ [এখানে যোগজীয় রাশিটির লব হরের অন্তরক সহগ]

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

(ii) $\int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

$$= \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)dx}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$$

বিকল্প পদ্ধতি : $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \tan x)\, dx}{\sec x + \tan x}$

$= \ln\,|\sec x + \tan x|$ [∵ এখানে লব, হরের অন্তরক]

46. কতিপয় আদর্শ যোগজ (Some standard integrals)

(A) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

প্রমাণ : মনে করি $x = a\tan\theta$, তাহলে, $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a^2\sec^2\theta}$$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

অনুসি. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$

(B) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$, $(x \neq \pm a)$, $a > x$

প্রমাণ : $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right\}dx$

$$= \frac{1}{2a}\left\{\int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x}\right\}$$

$$= \frac{1}{2a}\{\ln|a+x| - \ln|a-x|\} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

(C) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$, $(x \neq \pm a)$, $x > a$

প্রমাণ ঃ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{1}{2a} \left\{ \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right\} dx$

$$= \frac{1}{2a} \left\{ \int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right\}$$

$$= \frac{1}{2a} \{ \ln |x-a| - \ln |x+a| \}$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

(D) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a}$

প্রমাণ ঃ মনে করি $x = a \sin \theta$, তাহলে, $dx = a \cos \theta \, d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos \theta \, d\theta}{a \cos \theta} = \int d\theta = \theta = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

অনুসি. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1} x$

(E) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2}$$

এখন, $x + \frac{b}{2a} = z$ প্রতিস্থাপন করে, এটি $\frac{1}{a} \int \frac{dz}{z^2 \pm k^2}$ আকারের হয়, যা (A) অথবা (C)-এর সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

(F) $\int \frac{dx}{(ax + b) \sqrt{cx + d}}$

এখানে, $cx + d = z^2$ প্রতিস্থাপন করলে, $c \, dx = 2z \, dz$

$$\therefore \int \frac{dx}{(ax + b) \sqrt{cx + d}} = \frac{2}{c} \int \frac{z \, dz}{\left(a . \frac{z^2 - d}{c} + b\right) . z}$$

$= 2 \int \frac{dz}{az^2 + (bc - ad)}$ যা (A), (B) অথবা (C)-এর সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণমালা

উদা. 1. (i) $\int \frac{dx}{9+x^2}$ নির্ণয় কর।

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}$$

(ii) $\int \frac{dx}{4x^2+9}$ নির্ণয় কর।

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \int \frac{dx}{4\left(\frac{9}{4}+x^2\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{3}{2}\right)^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2x}{3}$$

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০৪ ; রা. বো. ২০০৬, ২০০৩; কু. বো. ২০০৬]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}} = \int \frac{dx}{4\sqrt{\frac{9}{16}-x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-x^2}}$$

$$= \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3}$$

(iv) $\int \frac{dx}{9-4x^2}$ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১১]

$$\int \frac{dx}{9-4x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{9}{4}-x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-x^2}$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2\times\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}+x}{\frac{3}{2}-x}\right|$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+2x}{3-2x}\right|$$

উদা. 2. (i) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৬]

মনে করি, $1-x^2 = z \quad \therefore -2x\,dx = dz$ বা, $x\,dx = -\frac{dz}{2}$

$$\therefore \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$= -\frac{1}{2}\times 2\sqrt{z} = -\sqrt{z} = -\sqrt{1-x^2}$$

(ii) $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx$ নির্ণয় কর।

মনে করি $\tan^{-1} x = z \quad \therefore \quad \frac{1}{1+x^2} dx = dz$

$$\therefore \int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx = \int z^2 dz = \frac{1}{3} z^3$$

$$= \frac{1}{3} (\tan^{-1} x)^3$$

(iii) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$-এর যোজিত ফল নির্ণয় কর।

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2}$$

প্রশ্নমালা IV C

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

1. $\int e^x \cos e^x \, dx$ 2. $\int e^{3 \cos 2x} \sin 2x \, dx$ 3. $\int \sec \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

4. $\int x^2 \cos x^3 \, dx$ 5. $\int x \sin x^2 \, dx$ 6. $\int x \, a^{x^2} \, dx$

7. $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ 8. $\int \tan^3 x \sec^2 x \, dx$ 9. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

10. $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$ 11. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-1} dx$ 12. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

13. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ 14. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$ [দি. বো. ২০১০] 15. $\int \operatorname{cosec} \frac{x}{2} dx$

16. $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$ [য. বো. ২০১০]

17. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ [সি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৯, ২০০৭, ২০০৫, ২০০১; চ. বো. ২০০৮; রা. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৬, ২০০১; য. বো. ২০০৩]

18. $\int \frac{e^{-x} dx}{(5 + e^{-x})^2}$ 19. $\int \cos x \cos (\sin x) \, dx$ 20. $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$ [য. বো. ২০০৭; ঢা. বো. ২০০৪]

21. $\int \sec \frac{x}{2} dx$ 22. $\int \frac{dx}{16+x^2}$ 23. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$ [ব. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০২; কু. বো. ২০০০]

24. $\int \frac{4}{16a^2 + x^2} dx$ 25. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$ [দি. বো. ২০১০]

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}}$ [সি. বো. ২০০৯] (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$ [য. বো. ২০১১; চ. বো. ২০১১, ২০০৩; ব. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০২; ঢা. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৮]

26. $\int \frac{dx}{9x^2-16}$ [ঢা. বো. ২০০৩] 27. $\int \frac{dx}{16-4x^2}$ [সি. বো. ২০০১]

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$ [কু. বো. ২০১০, ২০০৭; য. বো. ২০০৫]

29. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$ [সি. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৪] 30. $\int \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

31. $\int \frac{3x^2}{1+x^6}dx$ [চ. বো. ২০০৮]

32. $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$ [ব. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৮] 33. $\int e^{\tan^{-1}x}.\frac{1}{1+x^2}dx$ 34. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$ [চ. বো. ২০০২]

35. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}}dx$ 36. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ 37. $\int \sec^2 x\, e^{\tan x}\,dx$

38. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ 39. $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$ [ঢা. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৪] 40. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

41. $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx$ [য. বো. ২০০৪] 42. $\int \frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ [ব. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০১]

43. $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x}\,dx$ [ঢা. বো. ২০০৭]

44. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\sin x)^2}$ [ব. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৬; রা. বো. ২০০৪]

45. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{1+\tan x}}$ [ঢা. বো. ২০০০] 46. $\int (1+\cos x)^5 \sin x\,dx$

47. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$ [রা. বো. ২০১০; কু. বো. ২০০৫] 48. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$ 49. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

50. $\int e^{a\sin^{-1}x}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 51. (i) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$ (ii) $\int \frac{\tan(\ln x)}{x}dx$

(iii) $\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)}dx$ [রা. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৯, ২০০১; সি. বো. ২০০৯, ২০০৭; দি. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৮, ২০০৪; চ. বো. ২০০৬; ব. বো. ২০০৬]

(iv) $\int \frac{d\theta}{1+3\cos^2\theta}$ [চ. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০৫]

52. (i) $\int \frac{\sec^2 x}{3-4\tan x}dx$ (ii) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$ (iii) $\int \frac{5e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$ [চ. বো. ২০১১, ২০০১]

53. (i) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ [রা. বো. ২০০৬] (ii) $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$ [য. বো. ২০০৬]

(iii) $\int \frac{x^2\tan^{-1}x^3}{1+x^6}dx$ [কু. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০৭; মা. বো. ২০০৮]

54. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{(\sin^{-1}x)}\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\tan^{-1}x+3}}$ (iii) $\int e^{-x^3}x^2\,dx$

55. (i) $\int \frac{\sin(2+5\ln x)}{x}dx$ (ii) $\int e^x\tan e^x\sec e^x\,dx$

56. (i) $\int \frac{2x \sin^{-1} x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$ (ii) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx$

(iii) $\int \frac{\tan(\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [ব. বো. ২০১১, ২০০৭; য. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৭, ২০০৪; সি. বো. ২০০৬; রা. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০১১, ২০০৭]

57. (i) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$ [য. বো. ২০১০] (ii) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(4+x)}}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{\{x(4-x)\}}}$

58. (i) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-2x^4)}}$ [চ. বো. ২০১০] (ii) $\int (2x+3)\sqrt{x^2+3x}\,dx$

59. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{(15-4x-4x^2)}}$ (ii) $\int x^2\sqrt{(1-x^3)}\,dx$

60. (i) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-1)}}$ (ii) $\int \frac{x dx}{\sqrt{(16-x^2)}}$ (iii) $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$ [চ. বো. ২০০৩]

61. (i) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{(x+1)}}$ [ঢা. বো. ২০১০] (ii) $\int \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}\,dx$ (iii) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(iv) $\int \frac{1}{1+\tan x} dx$ [দি. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০১০, ২০০৮; কু. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০১; চ. বো. ২০১০, ২০০৬; সি. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০৬; ব. বো. ২০০৯, ২০০৫; রা. বো. ২০০৮, ২০০৫; চ. বো. ২০০৬]

62. (i) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$ [য. বো. ২০১১; ব. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০২] (ii) $\int \frac{x dx}{x^4+3}$

(iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ [রা. বো. ২০১১; য. বো. ২০০১] 63. $\int \frac{\sin 8x}{9+\sin^4 4x}$ 64. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin^2 2x+8}$

65. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}$ [চ. বো. ২০১০, ২০০৫; রা. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০০] 66. $\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$

উত্তরমালা

1. $\sin e^x$
2. $-\frac{1}{6}e^{3\cos 2x}$
3. $2\ln(\sec\sqrt{x}+\tan\sqrt{x})$
4. $\frac{1}{3}\sin x^3$
5. $-\frac{1}{2}\cos x^2$
6. $\frac{1}{2}a^{x^2}/\ln(a)$
7. $\frac{1}{4}\sin^4 x$
8. $\frac{1}{4}\tan^4 x$
9. $\frac{1}{3}\{\ln(x)\}^3$
10. $\ln(1+x^2)$
11. $\frac{1}{3}\ln(e^{3x}-1)$
12. $-\ln|1+\cos x|$
13. $\ln\{\ln(x)\}$
14. $\ln(e^x+e^{-x})$
15. $2\ln\left(\tan\frac{x}{4}\right)$
16. $-\ln(1+e^{-x})$
17. $\tan^{-1}(e^x)$
18. $\frac{1}{5+e^{-x}}$
19. $\sin(\sin x)$
20. $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$
21. $2\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{4}\right)\right|$
22. $\frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{x}{4}$
23. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{3x}{2}$
24. $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{4a}$
25. (i) $\sin^{-1}\frac{x}{5}$ (ii) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{5}$ (iii) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}}$

26. $\frac{1}{24}\cdot\ln\left(\frac{3x-4}{3x+4}\right)$
27. $\frac{1}{16}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$
28. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x$
29. $\ln(\tan^{-1}x)$
30. $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$
31. $\tan^{-1}(x^3)$
32. $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^2)$
33. $e^{\tan^{-1}x}$
34. $-\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}$
35. $\frac{2}{5}e^{\sqrt{x}}$
36. $2\sin\sqrt{x}$
37. $e^{\tan x}$
38. $\frac{2}{3}\{1+\ln x\}^{3/2}$
39. $e^{\sin x}$
40. $\frac{1}{2}\{\ln(x)\}^2$
41. $\ln(x+\sin x)$
42. $\ln|1+\ln x|$
43. $-\frac{1}{4}\ln|3+4\cos x|$
44. $\frac{1}{1-\sin x}$
45. $2\sqrt{1+\tan x}$
46. $-\frac{1}{6}(1+\cos x)^6$
47. $2\sqrt{\sin x}$
48. $-1/\ln|x|$
49. $\frac{2}{3}\sin^3\frac{x}{2}$
50. $\frac{1}{a}e^{a\sin^{-1}x}$
51. (i) $\sin\{\ln x\}$ (ii) $\ln\{\sec(\ln|x|)\}$
(iii) $-\ln\{\ln|\cos x|\}$ (iv) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)$
52. (i) $-\frac{1}{4}\ln|3-4\tan x|$ (ii) $\sin^{-1}(\tan x)$ (iii) $\frac{5}{2}\tan^{-1}(e^{2x})$
53. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x$ (iii) $\frac{1}{6}(\tan^{-1}x^3)^2$
54. (i) $2\sqrt{\sin^{-1}x}$ (ii) $2\sqrt{\tan^{-1}x+3}$ (iii) $-\frac{1}{3}e^{-x^3}$
55. (i) $-\frac{1}{5}[\cos\{2+5\ln(x)\}]$ (ii) $\sec e^x$
56. (i) $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x^2)^2$ (ii) $\ln(\sin x+\cos x)$ (iii) $\ln\sec(\sin^{-1}x)$
57. (i) $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right)$ (ii) $\frac{2}{3}(x-8)\sqrt{(4+x)}$ (iii) $\sin^{-1}\frac{x-2}{2}$
58. (i) $-\frac{1}{4}\sqrt{1-2x^4}$ (ii) $\frac{2}{3}(x^2+3x)^{3/2}$
59. (i) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{4}\right)$ (ii) $-\frac{2}{9}(1-x^3)^{3/2}$
60. (i) $\sec^{-1}x$ (ii) $-\sqrt{(16-x^2)}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$
61. (i) $\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\sqrt{(x+1)}-2}{\sqrt{(x+1)}+2}\right]$ (ii) $5\sin^{-1}\frac{x}{5}+\sqrt{25-x^2}$ (iii) $\frac{x}{a^2\sqrt{(a^2+x^2)}}$
(iv) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln(\cos x+\sin x)$
62. (i) $\frac{1}{3}\sin^{-1}(x^3)$ (ii) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)$ (iii) $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$
63. $\frac{1}{12}\tan^{-1}\left(\frac{\sin^2 4x}{3}\right)$
64. $\frac{\sqrt{2}}{8}\tan^{-1}\left(\frac{\sin 2x}{2\sqrt{2}}\right)$
65. $2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+\ln(\sqrt[4]{x}-1)^4$
66. $\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right|$

সখণ্ড পদ্ধতিতে যোগজীকরণ
Integration by Parts

47. মনে করি u এবং w উভয়ই x-এর ফাংশন। u এবং w-এর গুণফলকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d}{dx}(uw) = u\frac{dw}{dx} + w\frac{du}{dx}$$

উভয়পক্ষ x-এর সাপেক্ষে যোগজীকরণ করে পাই,

$$uw = \int u\frac{dw}{dx}dx + \int w\frac{du}{dx}dx$$

অথবা, $\int u\frac{dw}{dx}dx = uw - \int w\frac{du}{dx}dx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$

মনে করি $\frac{dw}{dx} = v \quad \therefore \; w = \int v dx$

অতএব, (i) থেকে আমরা পাই,

$$\int (uv)\,dx = u\int vdx - \int\left(\frac{du}{dx}\int vdx\right)dx$$

অর্থাৎ, দুইটি ফাংশনের গুণফলের যোগজ = প্রথম ফাংশন × দ্বিতীয় ফাংশনের যোগজ — (প্রথম ফাংশনের অন্তরক সহগ × দ্বিতীয় ফাংশনের যোগজ)-এর যোগজ।

যোজ্য রাশিটিকে প্রথম ফাংশন ও দ্বিতীয় ফাংশনে বিশ্লেষণ করে যোগজ নির্ণয় করা হয় বলে এ পদ্ধতিটিকে সখণ্ড যোজন বলা হয়।

দ্রষ্টব্য ঃ দুইটি ফাংশনের গুণফলের যোগজ নির্ণয় করার সময় তাদের ক্রম এমনভাবে ঠিক করতে হবে যেন দ্বিতীয় ফাংশনটির সহজেই যোগজ নির্ণয় করা যায় এবং প্রথম ফাংশনের অন্তরক সহগ ও দ্বিতীয়টির যোগজের গুণফলের যোগজ সরাসরি অথবা পরোক্ষভাবে বের করা যায়।

উদাহরণমালা

উদা. 1. $\int xe^x dx$ নির্ণয় কর।

$$\int xe^x dx = x\int e^x dx - \int\left(\frac{d}{dx}x\int e^x dx\right)dx$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x \text{ (উত্তর)}$$

উদা. 2. $\int \ln x\,dx$ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৮, ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৪]

$$\int \ln x\,dx = \ln x\int dx - \int\left(\frac{d}{dx}\ln x\int dx\right)dx$$

$$= x\ln x - \int \frac{1}{x}.x\,dx$$

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x \text{ (উত্তর)}$$

উদা. 3. $\int \tan^{-1} x\, dx$ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০২]

$$\int \tan^{-1} x\, dx = \tan^{-1} x \int dx - \int \left(\frac{d}{dx}\tan^{-1} x \int dx\right) dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \text{ (উত্তর)}$$

উদা. 4. $\int e^x \cos x\, dx$ নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১০]

মনে করি $\int e^x \cos x\, dx = \text{I}$

তা হলে, $\text{I} = \int e^x \cos x\, dx = \cos x \int e^x\, dx - \int \left(\frac{d}{dx}\cos x \int e^x\, dx\right) dx$

$$= e^x \cos x + \int \sin x \,.\, e^x\, dx$$

$$= e^x \cos x + \sin x \int e^x\, dx - \int \left(\frac{d}{dx}\sin x \int e^x\, dx\right) dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \text{I}$$

$\therefore\ 2\text{I} = e^x(\cos x + \sin x)$

বা, $\text{I} = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)$ (উত্তর)

উদা. 5. $\int e^x \sec x\,(1+\tan x)\, dx$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৩]

$$\int e^x \sec x\,(1+\tan x)\, dx = \int e^x \sec x\, dx + \int e^x \sec x \tan x\, dx$$

$$= \sec x \int e^x\, dx - \int \left(\frac{d}{dx}\sec x \int e^x\, dx\right) dx + \int e^x \sec x \tan x\, dx$$

$$= e^x \sec x - \int e^x \sec x \tan x\, dx + \int e^x \sec x \tan x\, dx$$

$$= e^x \sec x \text{ (উত্তর)}$$

প্রশ্নমালা IV D

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

1. $\int x\sin x\,dx$ 2. $\int x^2\sin x\,dx$ 3. $\int x^3 e^{2x}\,dx$

4. $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ 5. $\int xe^{-x}\,dx$ 6. $\int x^2 e^x\,dx$
[সি. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৪]

7. $\int x\cos x\,dx$ 8. $\int x\cos^2 x\,dx$ [সি. বো. ২০০৭] 9. $\int x\sin x\cos x\,dx$

10. $\int \frac{\ln(\ln x)\,dx}{x}$ 11. $\int x\ln x\,dx$ [ব. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৬; য. বো. ২০০৩]

12. $\int x\sin 3x\,dx$ 13. $\int x^3\ln x\,dx$ 14. $\int xe^{ax}\,dx$

15. $\int x^2e^{-3x}\,dx$ 16. (i) $\int \cos^{-1}x\,dx$ [রা. বো. ২০১০; য. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৭; কু. বো. ২০০৫]

(ii) $\int (\ln x)^2\,dx$ [য. বো. ২০০৫, ২০০৭] (iii) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ 17. $\int \sin^{-1}x\,dx$ [য. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৩]

18. $\int x\tan^{-1}x\,dx$ [দি. বো. ২০১১; কু. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৮, ২০০৪; রা. বো. ২০০৬; য. বো. ২০০৬, ২০০১; ব. বো. ২০০২; মা. বো. ২০০৮]

19. $\int x\sin^3 x\,dx$ 20. $\int x\sin^2\frac{x}{2}\,dx$

21. (i) $\int e^x(\sin x+\cos x)\,dx$ [সি. বো. ২০১১, ২০০৫; ঢা. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৬; কু. বো. ২০০০]

(ii) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

22. $\int \text{cosec}^3 x\,dx$ 23. $\int \frac{e^x}{x}(1+x\ln x)\,dx$ [য. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০১]

24. (i) $\int x\sin^{-1}x\,dx$ [ঢা. বো. ২০০৭; মা. বো. ২০০৬, ২০০৩, ২০০২]

(ii) $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$ 25. $\int x\cos 2x\cos 3x\,dx$ 26. $\int x\sin x\sin 2x\,dx$

27. $\int e^{2x}\cos x\,dx$ 28. $\int x\sec^2 x\,dx$ 29. $\int x^2\cos^2\frac{x}{2}\,dx$

30. $\int e^x\sin 2x\,dx$ [সি. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৯, ২০০৪ ; দি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৩]

31. $\int x\tan^2 x\,dx$ [রা. বো. ২০০৫; সি. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০২]

32. $\int e^{2t}\cos e^t\,dt$ 33. $\int e^x\left\{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx$

34. $\int e^{5x}\left\{5\ln x+\frac{1}{x}\right\}dx$ [চ. বো. ২০০৯] 35. $\int e^{-x}\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right\}dx$

36. $\int \frac{\ln(\sec^{-1}x)}{x\sqrt{x^2-1}}dx$ [ঢা. বো. ২০০৮] 37. $\int x^2\ln x\,dx$ 38. $\int x^2(\ln x)^2\,dx$

39. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ [ঢা. বো. ২০১১; কু. বো. ২০১১, ২০০৯; চ. বো. ২০১১, ২০০৫, ২০০৪; য. বো. ২০০৯, ২০০৩; সি. বো. ২০০৬]

40. $\int x^3\sin x\,dx$ 41. $\int e^x\sin x\,dx$ [কু. বো. ২০০৮, ২০০৩; ঢা. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০১]

42. $\int x\sin^{-1}x^2\,dx$ [রা. বো. ২০০৬; ঢা. বো. ২০০৫]

উত্তরমালা

1. $-x\cos x+\sin x$

2. $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$

3. $\frac{1}{2}x^3e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}-\frac{3}{8}e^{2x}$

4. $\frac{2}{3}x(1+x)^{3/2}-\frac{4}{15}(1+x)^{5/2}$

5. $-(x+1)e^{-x}$

6. $e^x(x^2-2x+2)$

7. $x\sin x+\cos x$

8. $\frac{1}{4}(x^2+x\sin 2x)+\frac{1}{8}\cos 2x$

9. $\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x$

10. $\ln x[\ln(\ln x)-1]$

11. $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$

12. $\frac{1}{9}\sin 3x-\frac{1}{3}x\cos 3x$

13. $\frac{1}{4}x^4\left\{\ln x-\frac{1}{4}\right\}$

14. $\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$

15. $-\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)$

16. (i) $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$ (ii) $x\{\ln x\}^2-2x.\ln x+2x$ (iii) $-\frac{1}{x}\ln(xe)$

17. $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

18. $\frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x$

19. $-\frac{3}{4}x\cos x+\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}x\cos 3x-\frac{1}{36}\sin 3x$

20. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

21. (i) $e^x\sin x$ (ii) $-\frac{1}{2}(1-x^2)e^{x^2}$

22. $-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x\cot x+\frac{1}{2}.\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

23. $e^x.\ln(x)$

24. (i) $\frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{4}\sin^{-1}x$ (ii) $-x\cot x+\ln|\sin x|$

25. $\frac{1}{10}x\sin 5x+\frac{1}{50}\cos 5x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

26. $\frac{1}{2}(x\sin x+\cos x-\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{9}\cos 3x)$

27. $\frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x+\sin x)$

28. $x\tan x-\ln|\sec x|$

29. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x-\sin x$

30. $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x-2\cos 2x)$

31. $x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}$

32. $e^t\sin e^t+\cos e^t$

33. $e^x/(1-x)$

34. $e^{5x}.\ln|x|$

35. $-e^{-x}/x$

36. $\sec^{-1}x[\ln|\sec^{-1}x|-1]$

37. $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3$

38. $\frac{1}{27}x^3[9\{\ln x\}^2-6.\ln x+2]$

39. $\frac{e^x}{x+1}$

40. $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x$

41. $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)$

42. $\frac{1}{2}x^2\sin^{-1}x^2+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}$

মূলদ ভগ্নাংশের যোগজীকরণ
Integration of Rational Fraction

48. কোনো মূলদ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগজ নির্ণয় করার জন্য প্রথমে ভগ্নাংশটিকে কয়েকটি আংশিক ভগ্নাংশে ভাগ করে নিতে হয়। পরে প্রতিটি আংশিক ভগ্নাংশ পৃথক পৃথকভাবে যোগজীকরণ করা হয়। নিচের উদাহরণগুলিতে বিভিন্ন প্রকারের মূলদ ভগ্নাংশের যোগজীকরণের পদ্ধতি দেখান হলো।

উদা. 1. $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$ মান নির্ণয় কর।

হরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x+1}{x(x^2+x-6)} = \frac{x+1}{x(x+3)(x-2)}$$

মনে করি, $\frac{x+1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$

$\therefore \quad x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$

উভয় পক্ষে, $x=0$ বসিয়ে পাই, $-6A = 1 \quad \therefore A = -\frac{1}{6}$

$x=2$ বসিয়ে পাই, $10B = 3 \quad \therefore B = \frac{3}{10}$

$x=-3$ বসিয়ে পাই, $15C = -2 \quad \therefore C = -\frac{2}{15}$

$$\therefore \int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx = -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| \text{ (উত্তর)}$$

উদা. 2. $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx$ নির্ণয় কর।

মনে করি $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

$\therefore \quad x = A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2$

উভয় পক্ষে $x=1$ বসিয়ে পাই, $3A = 1$ বা, $A = \frac{1}{3}$

$x=-2$ বসিয়ে পাই, $9C = -2$ বা, $C = -\frac{2}{9}$

উভয় পক্ষে ধ্রুব পদের সমতা বিধান করে পাই,

$2A - 2B + C = 0 \quad \therefore B = \frac{2}{9}$

$$\therefore \int\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{2}{9}\ln|x+2|$$

$$= -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| \text{ (উত্তর)}$$

উদা. 3. $\int \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)} dx$ নির্ণয় কর।

মনে করি, $\frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$\therefore \quad x+2 = A(x^2+4) + (Bx+C)(1-x)$

$x=1$ বসিয়ে পাই, $5A = 3, \; A = \frac{3}{5}$

$x+2 = A(x^2+4) + Bx - Bx^2 + C - Cx$

উভয় পক্ষে x^2-এর সহগের সমতা বিধান করে পাই, $A - B = 0 \;\; \therefore B = \frac{3}{5}$

উভয় পক্ষে ধ্রুব পদের সমতা বিধান করে পাই,

$4A + C = 2 \;\; \therefore C = 2 - \frac{12}{5} = -\frac{2}{5}$

$$\therefore \int \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)} dx = \frac{3}{5}\int \frac{dx}{1-x} + \frac{3}{5}\int \frac{xdx}{x^2+4} - \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{3}{5}\ln|1-x| + \frac{3}{10}\ln(x^2+4) - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

$$= -\frac{3}{5}\ln|1-x| + \frac{3}{10}\ln(x^2+4) - \frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$ (উত্তর)

প্রশ্নমালা IV E

নিচের যোগজগুলি নির্ণয় কর ঃ

1. $\int \frac{dx}{x^2-9}$ 2. $\int \frac{dx}{x^3+x}$ 3. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$

4. $\int \frac{x+1}{3x^2-x-2} dx$ 5. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$ 6. $\int \frac{x+35}{x^2-25} dx$ [সি. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০৪]

7. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-4}$ [সি. বো. ২০০৮, ২০০১; রা. বো. ২০০৪; ব. বো. ২০০৪; চ. বো. ২০০২]

8. $\int \frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)}$ 9. $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} dx$

10. $\int \frac{x}{x^2-5x+6} dx$ 11. $\int \frac{1}{x(x-1)(x-3)} dx$ 12. $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$

13. $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$ 14. $\int \frac{2x+1}{(2x+3)^2} dx$ 15. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$

16. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x+2)^2}$ 17. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x+2)(x-3)^2}$

18. $\int \frac{1}{x^2(x-1)} dx$ [ব. বো. ২০১০, ২০০৫; রা. বো. ২০০২; কু. বো. ২০০২]

19. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$ [কু. বো. ২০১১, ২০০৪ দি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৭, ২০০১]

20. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ 21. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+4)}$ 22. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-1}$ 23. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3-x}$

24. $\int \frac{x^2-1}{x^2-4} dx$ [ঢা. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৯, ২০০১; য. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৫, ২০০৩]

25. $\int \frac{2x-1}{x(x-1)(x-2)} dx$ [ঢা. বো. ২০০৯] 26. $\int \frac{x-3}{(1-2x)(1+x)} dx$

27. $\int \frac{5-2x}{(x-1)^2(x+2)}dx$ 28. $\int \frac{x+3}{x^2+25}dx$ 29. $\int \frac{x\,dx}{(1-x)^2}$

30. $\int \frac{6x-10}{(2x+1)^2}\,dx$ 31. $\int \frac{x^2+1}{(x+2)^2}dx$ 32. $\int \frac{x+1}{x^2-7x+6}dx$

উত্তরমালা

1. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$

2. $\ln\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)}}$

3. $x+\ln\{(x+2)(x-4)^4\}$

4. $\frac{2}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{15}\ln|3x+2|$

5. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|$

6. $4\ln|x-5|-3\ln|x+5|$

7. $x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

8. $\frac{1}{a-b}\{a\ln|x-a|-b\ln|x-b|\}$

9. $2\ln|x-3|-\ln|x-2|$

10. $3\ln|x-3|-2\ln|x-2|$

11. $\frac{1}{3}\ln(x)+\frac{1}{6}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|$

12. $3.\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}$

13. $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}$

14. $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+\frac{1}{2x+3}$

15. $-\frac{3}{2}\ln(x)+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|$

16. $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|$

17. $-\frac{3}{25}\ln|x+2|+\frac{3}{25}\ln|x-3|-\frac{7}{5(x-3)}$

18. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}$

19. $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

20. $\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

21. $\frac{1}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{10}\ln|x^2+4|+\frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}$

22. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

23. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-3\ln x+\frac{5}{2}\ln|x-1|$

24. $x+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

25. $\frac{3}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln x-\ln|x-1|$

26. $\frac{5}{6}\ln|1-2x|-\frac{4}{3}\ln|x+1|$

27. $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}$

28. $\frac{1}{2}\ln(x^2+25)+\frac{3}{5}\tan^{-1}\frac{x}{5}$

29. $\frac{1}{1-x}+\ln|1-x|$

30. $\frac{1}{2}\left\{3\ln|2x+1|+\frac{13}{2x+1}\right\}$

31. $x-4\ln|x+2|-5/(x+2)$

32. $\frac{7}{5}\ln|x-6|-\frac{2}{5}(x-1)$

পঞ্চম অধ্যায়

নির্দিষ্ট যোগজ ও এর প্রয়োগ

THE DEFINITE INTEGRAL AND ITS APPLICATION

নির্দিষ্ট যোগজ
The Definite Integral

49. মনে করি $f(x)$-এর অনির্দিষ্ট যোগজ $\phi(x)$ এবং x-এর দুইটি নির্দিষ্ট মান $x = a$ এবং $x = b$. তাহলে x-এর মান a থেকে b-তে পরিবর্তনের ফলে $\phi(x)$ এর মানের পরিবর্তন $\phi(b) - \phi(a)$; a এবং b সীমার মধ্যে $f(x)$-এর নির্দিষ্ট যোগজ বলতে আমরা $\phi(b) - \phi(a)$-কে বুঝি এবং এটিকে $\int_a^b f(x)\,dx$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। a-কে নিম্ন সীমা এবং b-কে উর্ধ্ব সীমা বলে। নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করার জন্য নিচের সূত্রটি প্রয়োজন।

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\phi(x)\Big]_a^b = \phi(b) - \phi(a)\text{ , যেখানে } \phi(x) = \int f(x)\,dx$$

মনে রাখতে হবে যে নির্দিষ্ট যোগজে যোগজীকরণের ধ্রুবক থাকে না।

ব্যাখ্যা ঃ যদি $\int f(x)\,dx = \phi(x) + c = \psi(x)$ হয়, তবে $\int_a^b f(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a)$

$$= \{\phi(b) + c\} - \{\phi(a) + c\} = \phi(b) - \phi(a).$$

উদা. 1. (i) $\int_1^3 x^3\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int_1^3 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{4}[3^4 - 1] = \frac{80}{4} = 20 \text{ (উত্তর)}$$

(ii) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\tan^{-1} x\Big]_1^{\sqrt{3}} = \tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \text{ (উত্তর)}$$

উদা. 2. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০১]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right] = \frac{\pi}{4} \text{ (উত্তর)}$$

(ii) $\int_1^3 \frac{2x\,dx}{1+x^2}$-এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৩]

মনে করি $1+x^2=z \;\therefore\; 2x\,dx=dz$

এই পরিবর্তনের ফলে নিম্ন সীমা ও উর্ধ্ব সীমাও পরিবর্তিত হবে।

যখন $x=1, z=2$ এবং যখন $x=3, z=10$

$$\therefore \quad \int_1^3 \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \int_2^{10} \frac{dz}{z} = \Big[\ln z\Big]_2^{10} = \ln 10 - \ln 2$$

$$= \ln 5 + \ln 2 - \ln 2 = \ln 5 \text{ (উত্তর)}$$

উদা. 3. (i) মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos\theta\,d\theta$

মনে করি $\sin\theta = z$, তাহলে, $\cos\theta\,d\theta = dz$

যখন $\theta=0, z=0$ এবং যখন $\theta=\frac{\pi}{2}, z=1$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\cos\theta\,d\theta = \int_0^1 z^5\,dz = \left[\frac{1}{6}z^6\right]_0^1 = \frac{1}{6} \text{ (উত্তর)}$$

(ii) মান নির্ণয় কর : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^2 \sin x\,dx$ [চ. বো. ২০১১; সি. বো. ২০০৫]

মনে করি $1 + \cos x = z$, তাহলে, $-\sin x\,dx = dz$

যখন $x=0, z=2$ এবং যখন $x=\frac{\pi}{2}, z=1$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^2 \sin x\,dx = -\int_2^1 z^2\,dz$$

$$= -\left[\frac{1}{3}z^3\right]_2^1 = -\frac{1}{3}\left[1-2^3\right] = \frac{7}{3} \text{ (উত্তর)}$$

উদা. 4. মান নির্ণয় কর : (i) $\int_0^1 \frac{(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

[রা. বো. ২০১১, ২০০১; কু. বো. ২০০৬, ২০০৩; ঢা. বো. ২০০৪]

মনে করি, $\sin^{-1}x = z$, $\quad\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = dz$

যখন $x=0$, $z=\sin^{-1}0 = 0$, এবং $x=1$, $z=\sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_0^1 \frac{(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} z^2\,dx = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24} \cdot \text{ (উত্তর)}$$

(ii) মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ [য. বো. ২০১১; চ. বো. ২০১১; দি. বো. ২০১১; ঢা. বো. ২০০৯; রা. বো. ২০০৯, ২০০৬, ২০০৪; ব. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০৫, ২০০২; কু. বো. ২০০২, ২০০১]

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = [\tan^{-1} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1$$

$$= \tan^{-1} 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$ (উত্তর)

উদা. 5. (i) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$-এর মান নির্ণয় কর।

মনে করি, $I = \int \ln x \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$$= 2\ln x.\sqrt{x} - \int \frac{1}{x}.2\sqrt{x}\,dx$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$$

$$\therefore \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right]_1^4 = (4\ln 4 - 8) - (-4)$$

$$= 8\ln 2 - 4$$ (উত্তর)

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,\sin^3 x\,dx$-এর মান নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯, ২০০১; রা. বো. ২০০৮]

মনে করি, $\cos x = y$, $\therefore -\sin x\,dx = dy$

যখন $x = 0, y = 1$ এবং যখন $x = \frac{\pi}{2}, y = 0$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\,\sin^2 x \sin x\,dx$$

$$= \int_1^0 \sqrt{y}(1-y^2)(-dy) = -\int_1^0 (y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{5}{2}})\,dy$$

$$= \left[\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_1^0 = -\left(\frac{2}{7} - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{21}$$ (উত্তর)

(iii) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$-এর মান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৭, ২০০৪ ; চ. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০৩]

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$$

মনে করি, $e^x = y$, $\therefore\ e^x\,dx = dy$

$x = 0$ হলে, $y = 1$ এবং $x = 1$ হলে, $y = e$

$$\therefore \int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \int_1^e \frac{dy}{1+y^2} = \left[\tan^{-1} y\right]_1^e$$

$$= \tan^{-1} e - \tan^{-1} 1 = \tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$$ (উত্তর)

(iv) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \left[\sin^{-1}(x-1)\right]_0^1$$

$$= 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$ (উত্তর)

প্রশ্নমালা VA

নিচের নির্দিষ্ট যোগজগুলির মান নির্ণয় কর ঃ

1. (i) $\int_0^2 (2+x)\,dx$ (ii) $\int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx$ [কু. বো. ২০০৭, ২০০৬; ব. বো. ২০০৪]

(iii) $\int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx$ (iv) $\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx$ (v) $\int_1^2 \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$ (vi) $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\,dx$

2. $\int_0^{\pi/2} (\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta$. [চ. বো. ২০০৪]

3. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ [ঢা. বো. ২০১১; সি. বো. ২০১১; ব. বো. ২০০৮; রা. বো. ২০০১]

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}$ 4. $\int_0^1 \frac{3\,dx}{1+x^2}$ 5. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2+4}$

6. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2-9}$ 7. $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}$

8. $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ [য. বো. ২০০৯, ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৩]

9. $\int_{8}^{27} \frac{dx}{x-x^{\frac{1}{3}}}$ 10. $\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ [ঢা. বো. ২০১১; য. বো. ২০১০, ২০০৩; কু. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৯; দি. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৭; রা. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০১]

11. $\int_{4}^{8} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-15}}$ 12. $\int_{0}^{1} \ln(x^2+1)\,dx$ [ঢা. বো. ২০০৭]

13. $\int_{0}^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$ [য. বো. ২০০৯, ২০০৭; ব. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৫, ২০০৬; রা. বো. ২০০২; মা. বো. ২০০৬]

14. $\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ [সি. বো. ২০১১; রা. বো. ২০০৯, ২০০৫ ; চ. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০২]

15. $\int_{0}^{1} xe^{-3x}\,dx$ [দি. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৩] 16. $\int_{0}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$ 17. $\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

18. $\int_{0}^{1} \ln(1+x)\,dx$ 19. $\int_{0}^{\pi/2} \sin 2x\cos x\,dx$ [য. বো. ২০০৫; মা. বো. ২০০৫, ২০০৩]

20. $\int_{0}^{1} x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx$ [কু. বো. ২০১০, ২০০৭; রা. বো. ২০০৯, ২০০৭, ২০০৫, ২০০২; ব. বো. ২০০৯, ২০০৪, ২০০২; চ. বো. ২০০৮, ২০০৫; সি. বো. ২০০৮; মা. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৫]

21. $\int_{0}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{9-2x^2}}$ [ব. বো. ২০১০; য. বো. ২০০২] 22. $\int_{0}^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$ [য. বো. ২০০৪]

23. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$ 24. (i) $\int_{0}^{a} \frac{dx}{a^2+x^2}$ (ii) $\int_{0}^{\frac{1}{2}a} \frac{1}{a^2-x^2}\,dx$

25 (i) $\int_{0}^{\pi/2} \cos 2x\cos 3x\,dx$ [কু. বো. ২০০০ ; চ. বো. ২০০৩]

(ii) $\int_{0}^{\pi/2} \sin x\sin 2x\,dx$ [রা. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৮, ২০০১; চ. বো. ২০০৬, ২০০২; ব. বো. ২০০৬, ২০০৪]

26. $\int_{1}^{3} \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$ [ঢা. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০১]

27. (i) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\int_{0}^{4} y\sqrt{4-y}\,dy$ [ঢা. বো. ২০১০, ২০০৯; চ. বো. ২০১০, ২০০২; দি. বো. ২০১০; রা. বো. ২০০৭ ; ব. বো. ২০০৫]

(iii) $\int_{0}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$ [কু. বো. ২০১১, ২০০৩; সি. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৬, ২০০৩; য. বো. ২০০৮, ২০০০; ব. বো. ২০০৭ ; রা. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০৬, ২০০১; ঢা. বো. ২০০১]

28. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ [ঢা. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৭]

29. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{(\sin x)}} dx$ [চ. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০]

(ii) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx$ [দি. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০৮; রা. বো. ২০০৭; য. বো. ২০০৫]

30. (i) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x\,dx$ [য. বো. ২০১১; দি. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৩] (ii) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos 3x\,dx$

31. (i) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (ii) $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx$ [ঢা. বো. ২০১১, ২০০৫; কু. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০২; য. বো. ২০১০; চ. বো. ২০১০; সি. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০১; রা. বো. ২০০৭; ব. বো. ২০০৬, ২০০৩, ২০০১; মা. বো. ২০০৭]

(iii) $\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx$ [ব. বো. ২০১০, ২০০২; রা. বো. ২০০৬, ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০১]

32. $\int_2^4 \ln 2x\,dx$ [ব. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০১] 33. $\int_{\pi/2}^{\pi} (1+\sin 2\theta)\,d\theta$ [মা. বো. ২০০১]

34. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}} dx$ 35. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\,dx$ [ঢা. বো. ২০০৬; কু. বো. ২০০৪]

36. $\int_1^{\sqrt{3}} x \tan^{-1} x\,dx$ [রা. বো. ২০০৮, ২০০০; চ. বো. ২০০৮]

37. (i) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ [সি. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০৩; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৫; য. বো. ২০০৮, ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০৩; ব. বো. ২০০৫]

(ii) $\int_0^1 2x^3 e^{-x^2} dx$ [য. বো. ২০০২; চ. বো. ২০০২]

38. (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta \cos^4\theta\,d\theta$ (ii) $\int_0^{\pi/4} \cos x \sin^3 x\,dx$

39. $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ [দি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০৪]

40. $\int_{-2}^{5} \frac{7x}{\sqrt{x^2+3}} dx$ [কু. বো. ২০০০]

41. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$ [দি. বো. ২০১১; য. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০০; সি. বো. ২০১০, ২০০৪, ২০০২; রা. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০৬; চ. বো. ২০০৭, ২০০৫; ব. বো. ২০০৪, ২০০২; মা. বো. ২০১০, ২০০২]

42. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}dx$ [য. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৭, ২০০১; চ. বো. ২০১১, ২০০৯, ২০০৫; ব. বো. ২০১১, ২০০৬; ঢা. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০৪; কু. বো. ২০১০, ২০০৭, ২০০৫; রা. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০৪, ২০০২; দি. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৮; মা. বো. ২০১১, ২০০৭]

43. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 44. (i) $\int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin x}$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+\sin\theta)}\, d\theta$ [ব. বো. ২০১১]

45. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x + \tan x)\, dx$ [কু. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৫, ২০০১]

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x\, dx$ [চ. বো. ২০১১, ২০০৪; কু. বো. ২০০৬, ২০০৪; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০৩, ২০০০ ; রা. বো. ২০০৫]

46. (i) $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{(2x+3)^2}$ (ii) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) dx$

47. (i) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)}}$ (ii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$ [ঢা. বো. ২০০৩; কু. বো. ২০০১]

(iii) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{4-x^2}}$ [রা. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০; কু. বো. ২০১০, ২০০৫; সি. বো. ২০০৯]

48. (i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sec x + 1}{\sec x}dx$ [কু. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৬, ২০০৩]

(ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{(\pi/2)} (\sin x + \cos x)^2\, dx$

49. (i) $\int_0^{\pi} 3\sqrt{1-\cos x}\, \sin x\, dx$ [কু. বো. ২০০৪]

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x + \cos x)\, dx$ [কু. বো. ২০১১, ২০০৫; রা. বো. ২০১০]

50. (i) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\sin x}dx$ [রা. বো. ২০১০, ২০০৮; দি. বো. ২০১০; ব. বো. ২০০৯, ২০০৬, ২০০৩; য. বো. ২০০৮, ২০০৩, ২০০০; চ. বো. ২০০৮, ২০০৬; সি. বো. ২০০৮, ২০০৪; কু. বো. ২০০৫]

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin x}dx$ [সি. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৮, ২০০১; য. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০১]

51. (i) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta}d\theta$ [ব. বো. ২০১১] (ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x\, dx$ [ব. বো. ২০০৫; সি. বো. ২০০৩; রা. বো. ২০০০; মা. বো. ২০০৪]

52. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$ (ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ [ঢা. বো. ২০০৭]

53. (i) $\int_0^{\pi/4} 4\tan^3 x \sec^2 x\, dx$ [ঢা. বো. ২০১১; ব. বো. ২০১১; কু. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৯; দি. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৬]

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sqrt{\sin x}\, dx$ [কু. বো. ২০১১, ২০০৭; সি. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৪; দি. বো. ২০১১; ব. বো. ২০০৯, ২০০৭, ২০০৫; চ. বো. ২০০৭, ২০০৩; ঢা. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০১; য. বো. ২০০২]

54. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^3} dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{9-\sin^2 x}$ [কু. বো. ২০১০; ব. বো. ২০১০; চ. বো. ২০০৯; সি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৫; মা. বো. ২০০৮]

উত্তরমালা

1. (i) 6 (ii) 9 (iii) $\frac{40}{3}$ (iv) $\frac{1}{30}$ (v) 1 (vi) $\frac{5}{6}$ 2. 2 3. (i) 1 (ii) $\sqrt{3}+1$ 4. $\frac{3\pi}{4}$

5. $\frac{1}{4}\pi$ 6. $\frac{1}{6}$ [ln (0.1)] 7. $\frac{1}{5}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ 8. $\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

9. $\frac{3}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)$ 10. $\frac{1}{4}\pi a^2$ 11. 6 12. $\ln(2)+\frac{\pi}{2}-2$

13. $\frac{2}{3}$ 14. $\frac{\pi}{4}$ 15. $\frac{1}{9}(1-4e^{-3})$ 16. $\frac{2}{3}$

17. $\frac{\pi}{2}$ 18. $2\ln(2)-1$ 19. $\frac{2}{3}$ 20. $\frac{7}{18}$

21. 1 22. $\frac{3}{16}\pi$ 23. $1-\frac{\pi}{4}$ 24. (i) $\frac{\pi}{4a}$ (ii) $\frac{1}{2a}\ln(3)$

25. (ii $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}$ 26. sin (ln 3) 27. (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{128}{15}$ (iii) 4π 28. 1

29. (i) $1\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{1}{162}$ 30. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6}$

31. (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{1}{192}\pi^3$ (iii) $\frac{1}{3}(e^8-e)$ 32. $8\ln(2)-2$ 33. $\frac{\pi}{2}-1$

34. $\frac{\pi}{6}$ 35. $\frac{\pi^2}{4}-2$ 36. $\frac{1}{12}(5\pi-6\sqrt{3}+6)$ 37. (i) $\frac{1}{2}(e-1)$ (ii) $1-\frac{2}{e}$

38. (i) $\frac{8}{315}$ (ii) $\frac{1}{16}$ 39. $\frac{\pi^2}{8}$ 40. $7\sqrt{7}$ 41. $\frac{2}{3}$ 42. $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

43. $2(e-1)$ 44. (i) $\ln\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)$ (ii) 2 45. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}$

46. (i) $\frac{5}{11}$ (ii) $\frac{1}{2}\ln(2)$ 47. (i) 2 (ii) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (iii) $2-\sqrt{3}$ 48. (i) $\pi+2$ (ii) π

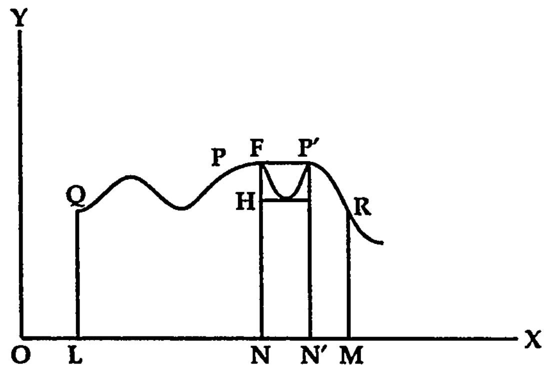
49. (i) $4\sqrt{2}$ (ii) $e^{\pi/2}$ 50. (i) $2-\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{3}+1$ 51. (i) $\frac{\pi}{2}-1$ (ii) $-\frac{2}{15}$

52. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$ 53. (i) 1 (ii) $\frac{8}{21}$ 54. (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{1}{6}\ln 2$

নির্দিষ্ট যোগজ-এর প্রয়োগ
Application of the Definite Integral

50. কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

মনে করি, $y = f(x)$, x-অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ কোটি দ্বারা আবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A_1; A_1-এর মান নির্ণয় করতে হবে। $f(x)$-ফাংশনটি (a, b) ব্যবধিতে সীমিত মানের একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন।



$y = f(x)$ বক্ররেখা, x-অক্ষ, কোটি QL এবং PN-দ্বারা আবদ্ধ QLNP = A-এর ক্ষেত্রফল বিবেচনা করি। OL = a একটি নির্দিষ্ট রাশি এবং ON = x রাশিটি পরিবর্তনশীল। যেহেতু, x-একটি পরিবর্তনশীল রাশি, A-সামতলিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলও পরিবর্তনশীল এবং এর মান x-এর মানের উপর নির্ভরশীল।

যখন x-এর মান δx (= NN′) পরিমাণ বৃদ্ধি পায় তখন A-এর মানের আনুষঙ্গিক বৃদ্ধি δA = PNN′P′. যদি δx ব্যবধিতে $f(x_1)$ এবং $f(x_2)$ যথাক্রমে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোটি হয় তবে $x \le x_1 \le x + \delta x$ এবং $x \le x_2 \le x + \delta x$; স্পষ্টতই, δA-এর ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্র HN′ অপেক্ষা বৃহত্তর ও আয়তক্ষেত্র FN′ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অর্থাৎ, $f(x_2)\,\delta x < \delta A < f(x_1).\,\delta x$

বা, $f(x_2) < \dfrac{\delta A}{\delta x} < f(x_1)$

যখন, $\delta x \to 0, f(x_1) \to f(x)$ ও $f(x_2) \to f(x)$ এবং $\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\delta A}{\delta x} = \dfrac{dA}{dx}$

অতএব, $\dfrac{dA}{dx} = f(x)$, যোগজীকরণ করে পাই,

$$A = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

এখন, $x = a$ হলে, $A = 0$ এবং $x = b$ হলে, $A = A_1$

$\therefore \quad A_1 = F(b) + C$ এবং $0 = F(a) + C$

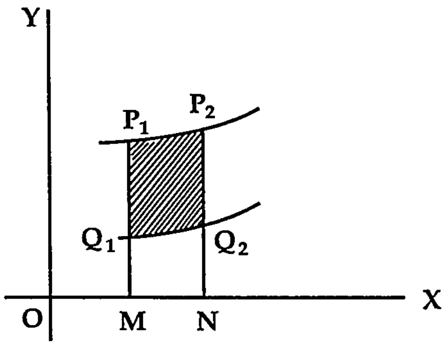
$$\therefore \quad A_1 = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$$

অতএব, নির্দিষ্ট যোগজ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx$, $y = f(x)$ বক্ররেখা,

x-অক্ষ ও দুইটি নির্দিষ্ট কোটি $x = a$ এবং $x = b$ এর দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

অনুসি : একই প্রকারে দেখানো যায় যে, $\int_c^d x\,dy$ নির্দিষ্ট যোগজটি, যে কোনো বক্ররেখা, y-অক্ষ এবং দুইটি প্রদত্ত ভুজ $y = c, y = d$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

51. দুইটি বক্ররেখা এবং দুইটি প্রদত্ত কোটির দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে,

$Q_1 Q_2 P_2 P_1$-এর ক্ষেত্রফল

$= P_1MN P_2$ ক্ষেত্র $-$ $Q_1 MN Q_2$ ক্ষেত্র

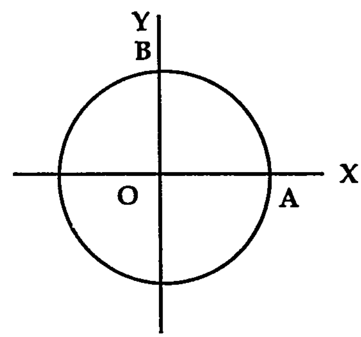
$$= \int_a^b f_1(x)\, dx - \int_a^b f_2(x)\, dx$$

যেখানে P_1P_2 ও Q_1Q_2 বক্ররেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ এবং $OM = a$ ও $ON = b$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_a^b \{f_1(x) - f_2(x)\}\, dx = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$

উদা. 1. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[চ. বো. ২০১১; য. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০১; মা. বো. ২০০৪]



$x^2 + y^2 = a^2$ সমীকরণ দ্বারা নির্ধারিত বৃত্তাকার এলাকাটির x-অক্ষ, y-অক্ষ দ্বারা সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট চারটি অংশে বিভক্ত হয়।

প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত অংশটির ক্ষেত্রফল $= \int_0^a y\, dx$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$$= 4 \int_0^a y\, dx$$

$$= 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$x = a \sin\theta$ বসিয়ে পাই, $dx = a \cos\theta\, d\theta$

এবং $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta} = a\cos\theta$

$\theta = 0$ যখন $x = 0$, এবং $\theta = \frac{\pi}{2}$ যখন $x = a$

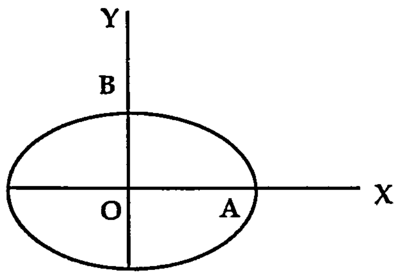
$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta . a\cos\theta\, d\theta$

$$= 2a^2 \int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\, d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 2a^2 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) = \pi a^2$$ (উত্তর)

উদা. 2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

[য. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৫; দি. বো. ২০১১; সি. বো. ২০১০, ২০০৬; কু. বো. ২০০৯, ২০০৬; ব. বো. ২০০৯, ২০০৭; রা. বো. ২০০৬; ঢা. বো. ২০০৪; চ. বো. ২০০৬, ২০০২]



উপবৃত্তের দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$=4\int_0^3 y\,dx \quad =4\int_0^3 \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$$

এখন, $x=3\sin\theta$ হলে, $dx=3\cos\theta\,d\theta$

এবং $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}=3\cos\theta$

$x=0$ হলে, $\theta=0$ এবং $x=3$ হলে, $\theta=\frac{\pi}{2}$

উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} 3\cos\theta.3\cos\theta\,d\theta=12\int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta\,d\theta$

$$=12\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=12\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

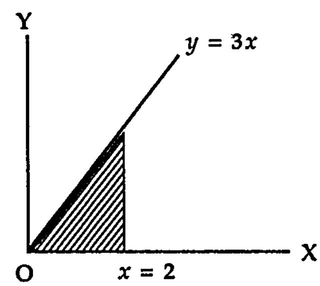
$$=12\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)=6\pi \text{ (উত্তর)}$$

উদা. 3. $y=3x$ সরলরেখা, x-অক্ষ এবং কোটি $x=2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

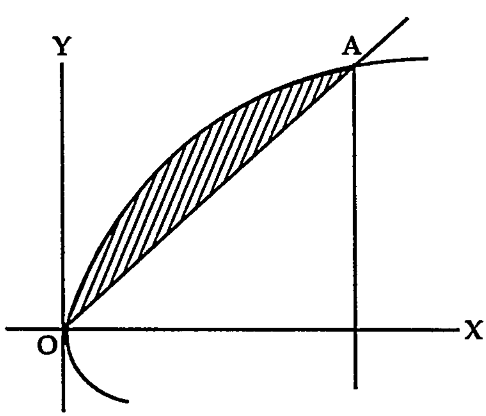
$$=\int_0^2 y\,dx=\int_0^2 3x\,dx$$

$$=3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=3\times\frac{2^2}{2}=6 \text{ (উত্তর)}$$



উদা. 4. $y^2=4x$ পরাবৃত্ত এবং $y=x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২০১১, ২০০৯; ব. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৩]



$y^2=4x$ এবং $y=x$

সমীকরণ দুইটি সমাধান করে পাই, $x=0, x=4$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

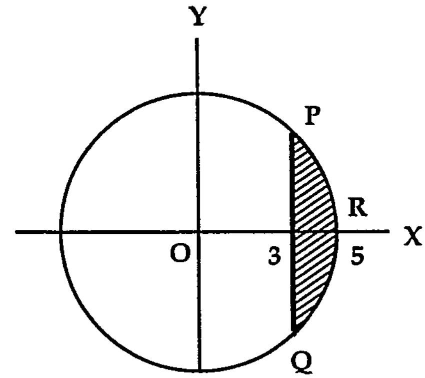
$$=\int_0^4 (y_1-y_2)\,dx$$

$$=\int_0^4 (2\sqrt{x}-x)\,dx$$

$$=\left[2\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\left[\frac{4}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^4=\left[\frac{32}{3}-8\right]=\frac{8}{3} \text{ (উত্তর)}$$

উদা. 5. $x^2+y^2=25$ বৃত্ত এবং $x=3$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
[কু. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৫; রা. বো. ২০০৯]

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = ক্ষেত্রফল PQR



$=2\int_3^5 y\,dx$

$=2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$

$x=5\sin\theta$ হলে, $dx=5\cos\theta\,d\theta$

এবং $\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-25\sin^2\theta}=5\cos\theta$;

আবার $x=3$ হলে, $\sin\theta=\frac{3}{5}$ বা, $\theta=\sin^{-1}\frac{3}{5}$

$x=5$ হলে, $\sin\theta=1$ বা, $\theta=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=2\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi/2} 25\cos^2\theta\,d\theta = 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi/2} 2\cos^2\theta\,d\theta$

$$=25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = 25\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi/2}$$

$$=25\left[\theta+\sin\theta\cos\theta\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\pi/2}$$

$$=25\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{3}{5}-\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\right]$$

$$=25\left[\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\cos\left(\cos^{-1}\frac{4}{5}\right)\right]$$

$=\frac{25\pi}{2}-25\sin^{-1}\frac{3}{5}-12$ (উত্তর)

প্রশ্নমালা V B

1. (i) $y=x^2$, x-অক্ষ এবং $x=2$ ও $x=5$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(ii) $y=x^3, y=0, x=1, x=3$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. $y=x^2$, x-অক্ষ এবং $x=1$ ও $x=3$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০২]

4. $x^2+y^2=16$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০১১; কু. বো. ২০১১, ২০০৭, ২০০০; ব. বো. ২০১১, ২০০৮, ২০০৬; রা. বো. ২০০৭; সি. বো. ২০০৭; চ. বো. ২০০৪]

5. $xy=c^2$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ এবং $x=a$ ও $x=b$ রেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [দি. বো. ২০১০]

6. x-অক্ষ এবং $y=\sin x$ বক্ররেখার একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাংকের অক্ষ দুইটির অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{6}a^2$ [সি. বো. ২০০৪]

8. দেখাও যে, $y^2=4ax$ এবং $x^2=4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}a^2$.

[দি. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৮; সি. বো. ২০০৪]

9. $x^2+y^2=1$ এবং $y^2=1-x$ বক্ররেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

1. (i) 39 (ii) 20

2. $\frac{26}{3}$

3. πab

4. 16π

5. $c^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

6. 2

9. $2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$

ঢাকা বোর্ড—২০১১

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি — নম্বর

১। একটি বিন্দুর কোটি এর ভুজের দ্বিগুণ। যদি এর দূরত্ব (4, 3) থেকে $\sqrt{10}$ একক হয়, তবে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, a-এর মান কত হলে $(a, 2-2a)$, $(1-a, 2a)$ এবং $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত হবে ?

২। (ক) A(1, 1), B(3, 4) এবং C(5, −2), ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা BC-এর সমান্তরাল।

অথবা, দুইটি সরলরেখা (− 1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x - y + 7 = 0$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ চলমান রেখাটি x ও y অক্ষরেখা দুইটিকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, এখানে p ধ্রুবক। দেখাও যে, AB-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হবে $p^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$. ৩

অথবা, দেখাও যে, $(\pm 4, 0)$ বিন্দু দুইটি হতে $3x \cos \theta + 5y \sin \theta = 15$ এর উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটির গুণফল θ মুক্ত হবে।

৩। (ক) একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষ দুইটির ধনাত্মক দিক থেকে যথাক্রমে 3 এবং 5 অংশ ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, মূলবিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x - 7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। c-এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৪। (ক) $x^2 = 4(1 - y)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (3, 4) উপকেন্দ্র এবং (0, 0) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ বিবেচনা করে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{1}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 8. ৩

অথবা, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

অথবা, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

(খ) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষের সাথে যে কোণগুলি উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। ৩

অথবা, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $y = f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = f(y)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

৭। মূল নিয়মে $\log_a x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর (যেকোনো দুটি) ঃ

(i) $(x^x)^x$; (ii) $\tan^{-1}\dfrac{a+bx}{a-bx}$; (iii) $\log_{10}x$; (iv) $\ln(\sin 2x)$.

৮। যদি $\cos\sqrt{y} = x$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 2 = 0$. ৪

অথবা, $y = e^{a\sin^{-1}x}$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)\,y_2 - xy_1 = a^2y$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে a^x অথবা $\sin x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষ দুটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভুজ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, দেখাও যে, $x + \dfrac{1}{x}$ এর গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১১। যেকোনো দুটির সমাকলন কর ঃ ৫

(i) $\int \sin 4x \sin 2x\, dx$; (ii) $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$; (iii) $\int \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}dx$; (iv) $\int \dfrac{x^2-1}{x^2-4}dx$.

১২। যেকোনো দুটির মান নির্ণয় কর ঃ ৫

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1+\cos x}$; (ii) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; (iii) $\int_0^1 \dfrac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\tan^3 x \sec^2 x\, dx$.

অথবা, $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

রাজশাহী বোর্ড—২০১১

গণিত (তত্ত্বীয়)
(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। (7, 5) ও (−2, −1) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, যদি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি A(x, y), B(1, 2) এবং C(2, 1) হয় এবং তার ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক হয়, তবে দেখাও যে, $x + y = 15$.

২। (ক) A(h, k) বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং B(k, h) বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (6, 7) বিন্দুগামী এবং $3x + 4y = 11$-এর সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।

(খ) A(2, 1) ও B(5, 2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $y = 2x + 1$ ও $2y - x = 4$ রেখা দুইটির অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক y-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ-এর দূরত্ব স্থির কর।

৩। (ক) একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y অক্ষ দুইটির ধনাত্মক দিক থেকে যথাক্রমে 3 ও 5 অংশ ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (4, 3) এবং যা $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তকে বহিস্থভাবে স্পর্শ করে।

(খ) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তটির জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। উক্ত জ্যায়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি (0, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। a, b, c-এর মান নির্ণয় কর।

(খ) উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y অক্ষ বিবেচনা করে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{1}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 8. ৩

অথবা, এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(1, -8)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$ এবং দিকাক্ষ $3x - 4y = 10$.

৫। (ক) ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে, প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$. ৩

অথবা, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

(খ) $\overrightarrow{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\overrightarrow{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৬। উদাহরণসহ ফাংশনের সংজ্ঞা দাও। যদি $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, -1 \le x \le 0$ হয়, তবে $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর এবং $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$-এর মান নির্ণয় কর। ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x}$.

৭। $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অন্তরক সহগের সংজ্ঞা দাও। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\cos 3x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) :

(i) $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$; (ii) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

(iii) $\sin\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$; (iv) $\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

৮। যদি $y = (\sin^{-1} x)^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$. ৪

অথবা, $x^y + y^x = a^b$ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

৯। ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $\tan^{-1} x$ অথবা a^x-কে অসীম ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$ বৃত্তের (1, 2) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$-এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

১১। সমাকলন কর (যেকোনো দুটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$; (ii) $\int \frac{2x \tan^{-1} x^2}{1+x^4} dx$;

(iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$; (iv) $\int \frac{x^2\, dx}{x^4-1}$.

১২। মান নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\, dx$; (ii) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^4}$;

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta}$; (iv) $\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

কুমিল্লা বোর্ড—২০১১

গণিত (তত্ত্বীয়)
(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি ও ভেক্টর

নম্বর

১। কোনো বিন্দুর কোটি 3 এবং বিন্দুটির দূরত্ব (5, 3) থেকে 4 হলে বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, A, B, C, D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, —1), (15, 2), (—1, 2) ও (4, —5) ; CD-কে AB রেখাটি যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

২। (ক) একটি সরলরেখা অক্ষ দুইটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে। মূলবিন্দু থেকে তার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক। তার সমীকরণ বের কর। ৩

অথবা, (2, 3) বিন্দু থেকে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি থেকে সরলরেখার উপর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) দুইটি সরলরেখা (6, — 7) বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $y + x\sqrt{3} - 1 = 0$ রেখার সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, দেখাও যে, (0, 1) বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

৩। (ক) একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y অক্ষ দুইটির ধনাত্মক দিক থেকে যথাক্রমে h ও k অংশ ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x = 0$, $y = 0$ এবং $x = a$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $5x^2+15x-10y-4=0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $(1, 0)$ ও $(-1, 0)$ উপকেন্দ্র এবং 3 উপকেন্দ্রিক লম্ববিশিষ্ট উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র ও শীর্ষ বিন্দু নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(-1, 3)$ এবং শীর্ষ $(4, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত।

৫। (ক) $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\vec{B}=6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। ৩

অথবা, প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজ ABC-তে $c=a\cos B+b\cos A$.

ক্যালকুলাস

৬। যদি $\phi(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\phi(y)+\phi(z)=\phi\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{3x^2}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\ln x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যেকোনো **দুইটি**) ঃ

(i) $\dfrac{(x^2+1)^2}{\sqrt[3]{x^2}}$; (ii) $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$; (iii) $\tan(\sin^{-1}x)$; (iv) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

৮। যদি $\ln y=\tan^{-1}x$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2+(2x-1)y_1=0$. ৪

অথবা, যদি $y=\sqrt{4+3\sin x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2y\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y^2=4$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে e^x অথবা $\tan^{-1}x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $x^2+4y^2=8$ উপবৃত্তের যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

অথবা, একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $3t+\dfrac{1}{8}t^2$ মিটার অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর তার বেগ কত হবে ?

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যেকোনো **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২}\times ২=৫$

(i) $\int\sec^2x\,\text{cosec}^2x\,dx$; (ii) $\int\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{a+x}}\,dx$;

(iii) $\int\dfrac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$; (iv) $\int\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যেকোনো **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২}\times ২=৫$

(i) $\int_0^1\dfrac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx$; (ii) $\int_0^{\pi/2}e^x(\sin x+\cos x)\,dx$;

(iii) $\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$; (iv) $\int_0^{\pi/2}\cos^3x\sqrt{\sin x}\,dx$.

অথবা, $x^2+y^2=16$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

যশোর বোর্ড—২০১১

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি ও ভেক্টরস — নম্বর

১। কোনো সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(3, -4)$ এবং $(-6, 5)$ এর তৃতীয় শীর্ষ বিন্দু $(-2, -1)$ হলে, চতুর্থ শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $A(x, y)$, $B(1, 2)$ এবং $C(2, 1)$ একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দু হলে এবং তার ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক। দেখাও যে, $x + y = 15$.

২। (ক) $A(p, q)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $B(q, p)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এবং $3x - y + 7 = 0$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। ৩

অথবা, (ক) $x = 3, x = 5, y = 4, y = 6$ বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $(0, 1)$ বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

৩। (ক) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(4, 5)$ বিন্দুগামী এবং যা $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। ৩

(খ) দেখাও যে, $lx + my = 1$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়। ৩

অথবা, (ক) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ হতে 6 একক দীর্ঘ জ্যা খণ্ডিত করে।

(খ) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং C-এর মান নির্ণয় কর।

৪। (ক) $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(3, 4)$, দিকাক্ষ $x + y - 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$। ৩

অথবা, (ক) উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y অক্ষ বিবেচনা করে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 8।

(খ) একটি অধিবৃত্ত $(6, 4)$ ও $(-3, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x-অক্ষ বরাবর হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহু তিনটির মধ্য বিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$. ৩

(খ) $\overrightarrow{P} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{Q} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ হলে P ও Q এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $\overrightarrow{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\overrightarrow{B} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

(খ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে e^{mx}-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) :

(i) $(x^2 + 1)\tan^{-1} x - x$; (ii) x^{x^x} ; (iii) $\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}$; (iv) $y = \sin(x+y)^2$.

৮। $y = \tan(m\tan^{-1} x)$ হলে, দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 - 2(my - x)y_1 = 0$. ৪

অথবা, $y = \sec x$ হলে দেখাও যে, $y_2 = y(2y^2 - 1)$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\ln(1-x)$ অথবা e^{-2x}-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। a-এর মান কত হলে $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করবে ? ৪

অথবা, দেখাও যে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 4$ ফাংশনটির কোনো গুরুমান বা লঘুমান নেই।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) : $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$; (ii) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$;

(iii) $\int e^x \sec x(1+\tan x)\,dx$; (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$.

১২। মান নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) : $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$; (ii) $\int_0^{\sqrt{3}} x\tan^{-1} x\,dx$;

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x\,dx$ (iv) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$.

অথবা, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

চট্টগ্রাম বোর্ড—২০১১

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য : দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। A ও B বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4, -5)$ AB রেখাংশকে C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন $AB = 3BC$; C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $A(2, 3)$ এবং $B(-1, 4)$ দুটি স্থির বিন্দু। একটি বিন্দু P এমনভাবে সঞ্চারমান যেন $PA : PB = 2 : 3$; P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। (ক) OABC একটি সামান্তরিক ; OA, x-অক্ষ বরাবর অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্কে (4, 2) ; A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। AC কর্ণের সমীকরণও নির্ণয় কর। ৩

(খ) যদি মূলবিন্দু থেকে $x \sec\theta - y \operatorname{cosec}\theta = k$ ও $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ রেখা দুটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে p ও p' হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $4p^2 + p'^2 = k^2$. ৩

অথবা, (ক) (6, 7) বিন্দুগামী এবং $3x + 4y = 11$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি $(-3, 6)$ বিন্দু থেকে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত সকল সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৩। (ক) একটি বৃত্ত (1, 2) ও (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b-এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্ত ও $2x + 3y + 1 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়।

(খ) $(1, -1)$ বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৪। (ক) $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

(খ) $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$ উপবৃত্তের কেন্দ্র, উৎকেন্দ্রিকতা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $x^2 = 4(1 - y)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, (1, 1) উপকেন্দ্র, $2x + y = 1$ নিয়ামক এবং $\sqrt{3}$ উৎকেন্দ্রতাবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ $7x^2 - 2y^2 + 12xy - 2x + 4y - 7 = 0$.

৫। (ক) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

(খ) ΔABC-তে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $c = a\cos B + b\cos A$. ৩

অথবা, (ক) $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের ডট্ গুণনের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, $\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$ এবং $\hat{i}\cdot\hat{i} = 1$ যেখানে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে x ও y-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর।

(খ) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষগুলোর সাথে যে কোণগুলো উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = \dfrac{3x + 5}{3x - 5}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $\dfrac{f(x) + 1}{f(x) - 1} = \dfrac{3x}{5}$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\ln x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে নিচের যেকোনো দুটি ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ ২ × ২ = ৪

(i) $x^{\cos x}$; (ii) $\tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{x}}{1 - x}$;

(iii) $\dfrac{x\sin x}{1 + \cos x}$; (iv) $\sin\{\ln(\sec x)\}$.

৮। $x = \sin\sqrt{y}$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0.$ ৪

অথবা, যদি $y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 2y.$

৯। ম্যাকলরিনের উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রতিষ্ঠা কর। ৪

অথবা, ম্যাকলরিনের উপপাদ্যের সাহায্যে a^x-কে অনন্তধারায় বিস্তৃত কর।

১০। $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব হয় তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$-এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) ঃ ২$\frac{১}{২}$ × ২ = ৫

(i) $\int 5\cos 4x \sin 3x\, dx$; (ii) $\int \dfrac{x\, e^x}{(x+1)^2}dx$;

(iii) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$; (iv) $\int \dfrac{5e^{2x}}{1+e^{4x}}dx.$

১২। মান নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) ঃ ২$\frac{১}{২}$ × ২ = ৫

(i) $\int_0^1 \dfrac{1+x}{1+x^2}dx$; (ii) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \sec^2 x\, dx$;

(iii) $\int_0^{\ln 2} \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$; (iv) $\int_0^{\pi/2} (1+\cos x)^2 \sin x\, dx.$

অথবা, $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বরিশাল বোর্ড—২০১১

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (11, 2), এর যে জ্যা (2, — 1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৩

অথবা, AB সরলরেখাটি P (3, 3) এবং Q (8, 5) বিন্দু দুটি দ্বারা সমত্রিখণ্ডিত করা হয়, A ও B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

২। (ক) একটি সরলরেখার অক্ষ দুটি থেকে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে। মূলবিন্দু থেকে তার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 4 একক। তার সমীকরণ বের কর। ৩

অথবা, দুটি সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $3y = 2x$ রেখার সাথে $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) মূলবিন্দু থেকে সরলরেখাসমূহের দূরত্ব 7 এবং তারা $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব। রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, দেখাও যে, $x = t$, $y = 2t + 1$ এবং $x = 2t$, $y = -t - 4$ রেখা দুটি $(-2, -3)$ বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

৩। (ক) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x-অক্ষকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ বৃত্ত দুটি পরস্পর অন্তস্থভাবে স্পর্শ করে। সাধারণ স্পর্শক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(3, 0)$ ও $(7, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ দুটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $y^2 = 4y + 4x - 8$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, কোনো উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক। তার উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

(খ) $(1, 1)$ উপকেন্দ্র ও $3x + 4y = 1$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। এর অক্ষের সমীকরণও নির্ণয় কর। ৩

অথবা, কোনো উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব 16 মিটার এবং তার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$, উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৫। (ক) ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$. ৩

অথবা, $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

(খ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। ৩

অথবা, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $y = f(x) = \frac{4x - 7}{2x - 4}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(y) = x$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\cos 2x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যেকোনো দুইটি) ঃ ২ × ২ = ৪

(i) $\tan^{-1} \frac{4\sqrt{x}}{1 - 4x}$; (ii) $(x^x)^x$;

(iii) $e^{2 \ln \tan 5x}$; (iv) $\frac{x \sin x}{1 + \cos x}$.

৮। $y = e^{a \sin^{-1} x}$ হলে দেখাও যে, $(1 - x^2) y_2 - xy_1 = a^2 y$. ৪

অথবা, $y = \sin (m \sin^{-1} x)$ হলে দেখাও যে, $(1 - x^2) y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে a^x **অথবা** $\cos x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 6x + 3$-এর কোনো বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম মান নেই।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \frac{\tan (\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$; (ii) $\int \frac{x\, dx}{x^4+1}$; (iii) $\int x \tan^{-1} x\, dx$; (iv) $\int \frac{\cos x\, dx}{(1-\sin x)^2}$.

১২। মান নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \tan^3 x \sec^2 x\, dx$; (ii) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$; (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+\sin \theta)}\, d\theta$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2 \theta} d\theta$.

অথবা, $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সিলেট বোর্ড—২০১২

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। $(7, 7)$ ও $(-5, -10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t+1, 1)$, $(2t+1, 3)$, $(2t+2, 2t)$, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $t = 2$ অথবা $t = -\frac{1}{2}$ হলে বিন্দুগুলো সমরেখ হবে।

২। (ক) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশ $(-4, 3)$ বিন্দুতে $5:3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। ৩

অথবা, y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 7y + 11 = 0$ এবং $x + 3y - 8 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) মূল বিন্দু থেকে 7 একক দূরবর্তী এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $(0, 0)$, $(0, 3)$ এবং $(4, 0)$, ত্রিভুজটির কোণসমূহের অন্তর্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) একটি বৃত্ত $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x-অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের একটি জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু $(4, -6)$ বিন্দুতে অবস্থিত।

(খ) $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $x + y + 1 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 - 8x - 10y = 8$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $5x - 12y - 9 = 0$ রেখার সমান্তরাল, স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, যে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র (0, 0) এবং শীর্ষবিন্দু (−2, −1) তার দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। $2x^2 + 3y^2 = 1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক (4, 2) এবং (8, 2) ; উৎকেন্দ্রিকতা 2 হলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৬। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। ৩

অথবা, ধ্রুবক 'a' এর মান নির্ণয় কর যেন, $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ এ তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে।

৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৮। যদি $f(x) = \cos(\ln x)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $f(x).f(y) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)\right] = 0.$ ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

৯। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে e^x-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) ঃ

(i) $x^{\ln x}$; (ii) $\tan^{-1}\dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}$; (iii) $\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$; (iv) $2x^0 \cos 3x^0$.

১০। যদি $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $y_2 - m^2y = 0$. ৪

অথবা, যদি $y = \sin(\sin x)$ হয় তবে দেখাও যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx}\tan x + y\cos^2 x = 0$.

১১। ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $\ln(1 + x)$. **অথবা,** a^x-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১২। $y = x^3 - 2x^2 + 4$ বক্ররেখার (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$ বক্ররেখাটি যে সমস্ত বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলিতে বক্ররেখার স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর।

১৩। যোগজ নির্ণয় কর (যেকোনো **দুইটি**) ঃ ২$\frac{১}{২}$ × ২ = ৫

(i) $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx$; (ii) $\int \dfrac{dx}{9 - 4x^2}$;

(iii) $\int \dfrac{dx}{(1 + x^2)\tan^{-1} x}$; (iv) $\int e^x(\sin x + \cos x)\, dx$.

১৪। মান নির্ণয় কর (যেকোনো দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$; (ii) $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx$;

(iii) $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sqrt{\sin x} \, dx$; (iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

অথবা, $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দিনাজপুর বোর্ড—২০১১

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। দেখাও যে, (1, 1), (—4, 13), (8, 8) এবং (13, —4) বিন্দু চারটি রম্বসের শীর্ষ বিন্দু। ৩

অথবা, A(2, 3) এবং B(— 1, 4) দুইটি স্থির বিন্দু। একটি সেট এমনভাবে গঠন করা হয়েছে যে A এবং B বিন্দু থেকে সেটের যেকোনো বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 2 ঃ 3। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

২। (ক) একটি সরলরেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ (6, 2) বিন্দুতে 2 ঃ 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি সরলরেখা অক্ষ দুইটি থেকে সমান সমান অংশ ছেদ করে এবং (α, β) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দুইটি সরলরেখা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$, $ax + by + 1 = 0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে, a ও b এর সম্পর্ক নির্ণয় কর।

৩। (ক) একটি বৃত্ত y-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (3, —4) বিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ ও y-অক্ষ থেকে তা কী পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

(খ) $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের 2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের একটি জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (4, — 6) বিন্দুতে অবস্থিত।

৪। (ক) $y^2 = 8x - 8y$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (3, 4) উপকেন্দ্র ও (0, 0) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) k-এর মান কত হলে $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, উপবৃত্তের প্রধান অক্ষদ্বয়কে x ও y-অক্ষরেখা হিসাবে বিবেচনা করে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 2, 0)$ এবং বৃহৎ অক্ষ ৪ একক।

৫। (ক) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ বের কর। ৩

অথবা, a-এর মান নির্ণয় কর যেন $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ এই তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে।

(খ) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, দেখাও যে, রম্বসের কর্ণগুলো পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = \cos(\ln x)$ হয় তবে $f(x)\, f(y) - \frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)\right\}$-এর মান নির্ণয় কর। ৪

অথবা, সীমার মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2}$.

৭। মূল নিয়মে e^{mx}-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) ঃ

(i) $2x^0 \cos 3x^0$; (ii) $\frac{e^x + \ln x}{\log_a x}$;

(iii) $(x^x)^x$; (iv) $\sin\left\{2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right\}$.

৮। $y = \sqrt{4 + 3\sin x}$ হলে দেখাও যে, $2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 = 4$. ৪

অথবা, যদি $y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\ln(1 - x)$ **অথবা** $\tan^{-1} x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তার কর। ৪

১০। $y(x - 2)(x - 3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, যদি কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে তার ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) ঃ ২$\frac{১}{২}$ × ২ = ৫

(i) $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x\, dx$; (ii) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$;

(iii) $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx$; (iv) $\int x \tan^{-1} x\, dx$.

১৪। মান নির্ণয় কর (যেকোনো দুটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx$; (ii) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)}$;

(iii) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sqrt{\sin x}\, dx$.

অথবা, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবন্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বাংলাদেশ মাদরাসা শিক্ষা বোর্ড

আলিম (বিজ্ঞান) পরীক্ষা, ২০১১

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি নম্বর

১। (7, 7) এবং (− 5, − 10) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে x অক্ষরেখা যে অনুপাতে বিভক্ত করে নির্ণয় কর। বিভাজন বিন্দুটির ভুজ কত ? ৩

অথবা, একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (2, 7) এবং (6, 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (6, 4) ; তৃতীয় শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর।

২। একটি সরলরেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ (6, 2) বিন্দুতে 2 ঃ 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (2, − 1) বিন্দু থেকে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৩। x অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ রেখা দুইটির সমবিন্দু রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, দেখাও যে, $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ বিন্দুটি $2x - 3y + 4 = 0$ এবং $6x + 4y - 7 = 0$ রেখা দুইটি হতে সমদূরবর্তী।

৪। একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (4, 5) বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। ৩

অথবা, এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (4, 3) এবং যা $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তকে বহিস্থভাবে স্পর্শ করে।

৫। $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তটির জ্যা (− 2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়। জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৬। (− 8, − 2) উপকেন্দ্র এবং $2x - y - 9 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, p-এর মান কত হলে $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি (± 1, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তটির অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৭। $4x^2 + 5y^2 - 16x + 10y + 1 = 0$, উপবৃত্তের উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রিকতা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, যে অধিবৃত্তের নিয়ামক $2x + y = 1$, উপকেন্দ্র $(1, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৮। $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

৯। দেখাও যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। ৩

অথবা, দেখাও যে, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ক্যালকুলাস

১০। যদি $y = f(x) = \dfrac{4x - 7}{2x - 4}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(y) = x$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x}$.

১১। x-এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে $\cos x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-কে পরিবর্তনশীল ধরে যেকোনো **দুটির** অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(i) $\cos^{-1} \dfrac{1 + x}{1 - x}$; (ii) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$;

(iii) $(\sin x)^x$; (iv) $x^{\cos^{-1} x}$.

১২। $y = e^{\tan^{-1} x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + (2x - 1)\dfrac{dy}{dx} = 0$.

অথবা, $y = \sqrt{4 + 3 \sin x}$ হলে, দেখাও যে, $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$.

১৩। ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে a^x **অথবা** $\ln(1 + x)$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১৪। $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখাটির ওপর এমন বিন্দুগুলো নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকসমূহ x অক্ষের ওপর লম্ব হয়। ৪

অথবা, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$-এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

১৫। যেকোনো **একটির** যোজিত ফল নির্ণয় কর ঃ ৫

(i) $\displaystyle\int \frac{\tan(\sin^{-1} x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; (ii) $\displaystyle\int x \cos^{-1} x \, dx$.

১৬। যেকোনো **একটির** মান নির্ণয় কর ঃ ৫

(i) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + e^x} dx$; (ii) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 3x^4} \, dx$.

ঢাকা বোর্ড—২০১০

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য : দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। যদি A(2, 5), B(5, 9) এবং D(6, 8) বিন্দু তিনটি ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু হয়, তাহলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দু C-এর স্থানাঙ্ক এবং রম্বসটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

অথবা, A(0, 4) এবং B(0, 6) দুইটি স্থির বিন্দু। কার্তেসীয় সমতলে বিন্দুসমূহের এমন একটি সেট গঠন করা হয়েছে যে AB রেখাংশ ঐ সেটের যে-কোনো বিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

২। (ক) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3, 2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে, যেন $OA - OB = 2$ হয়, যেখানে O মূলবিন্দু। ৩

অথবা, (2, 3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার ওপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি থেকে সরলরেখার লম্বদূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) A(2, 1) ও B(5, 2) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এমন রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $4x - 3y = 8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) দেখাও যে, A(1, 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের ওপর অবস্থিত। A বিন্দু দিয়ে বৃত্তটির যে ব্যাস অংকন করা যায় তার অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি বৃত্ত (1, 2) ও (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) মূলবিন্দু থেকে (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ওপর অংকিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 2 একক। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার ওপর লম্ব। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (−8, −2) উপকেন্দ্র এবং $2x - y - 9 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (3, 4), দিকাক্ষ $x + y - 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$. ৩

অথবা, এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (1, − 8), উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$ এবং দিকাক্ষ $3x - 4y = 10$.

৫। (ক) ধ্রুবক a-এর মান নির্ণয় কর যেন, $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ এই তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে। ৩

অথবা, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, রম্বসের কর্ণগুলো পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

(খ) a-এর মান কত হলে $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে ? ৩

অথবা, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজ ABC-তে $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

ক্যালকুলাস

৬। $f(x) = \ln(\sin x)$ এবং $\phi(x) = \ln(\cos x)$ হলে দেখাও যে, $e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 7x}{3x^2}$.

৭। মূল নিয়মে $\tan x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ

(i) $\tan(\sin^{-1} x)$; (ii) $x^{\cos^{-1} x}$; (iii) $\cos^{-1} 2x\sqrt{1 - x^2}$.

৮। $y = (e^x + e^{-x}) \sin x$ হলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$. ৪

অথবা, $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ হলে দেখাও যে, $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + m^2y = 0$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\tan^{-1} x$ **অথবা,** e^{mx}-কে অনন্তধারায় সম্প্রসারণ কর। ৪

১০। $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$ বক্ররেখা যেসব বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুগুলোতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $y = x^2 + \sqrt{1 - x^2}$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের ওপর লম্ব হয় তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

১১। যে-কোনো দুইটির সমাকলন কর ঃ ৫

(i) $\int \dfrac{1}{1 + \tan x} dx$; (ii) $\int \dfrac{dx}{(1 + x^2)\tan^{-1} x}$; (iii) $\int e^x (\sin x + \cos x)dx$; (iv) $\int \dfrac{dx}{(x - 3)\sqrt{x + 1}}$.

১২। যে-কোনো দুইটির মান নির্ণয় কর ঃ $2\frac{1}{2} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^{\ln 2} \dfrac{e^x}{1 + e^x} dx$; (ii) $\int_0^{\pi/4} \dfrac{dx}{1 + \sin x}$; (iii) $\int_0^4 y\sqrt{4 - y}\, dy$; (iv) $\int_0^1 \dfrac{x dx}{\sqrt{9 - x^2}}$.

রাজশাহী বোর্ড—২০১০

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশে উল্লেখিত সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। y-অক্ষ ও (7, 2) থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে a-এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t + 1, 1)$, $(2t + 1, 3)$, $(2t + 2, 2t)$, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। 't'-এর মান কত হলে বিন্দুগুলো সমরেখ হবে তাও নির্ণয় কর।

২। (ক) $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটির অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উক্ত খণ্ডিত অংশ কোনো বর্গের বাহু হলে তার ক্ষেত্রফলও নির্ণয় কর। ৩

অথবা, মূলবিন্দু এবং $x + 3y - 12 = 0$ রেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের ত্রিখণ্ডন বিন্দুর সংযোগ রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(-1, 2)$ বিন্দুগামী এবং $3x - y + 7 = 0$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। ৩

অথবা, (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা $7a - b + 2 = 0$.

৩। (ক) $2x - y = 3$ রেখার ওপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, -2)$ এবং $(-2, 0)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, 'b' বাহুবিশিষ্ট OABC একটি বর্গ। OA এবং OC-কে অক্ষদ্বয় বিবেচনা করে দেখাও যে, বর্গটির পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = b(x + y)$.

(খ) $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের '2' ভুজবিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, মূল বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তের ওপর অংকিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $y^2 = 4y + 4x - 8$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র ও অক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $(-8, -2)$ উপকেন্দ্র এবং $2x - y = 9$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) 'p'-এর মান কত হলে $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে ? উপবৃত্তটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য ও উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। ৩

অথবা, উপবৃত্তের বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষ দুইটিকে যথাক্রমে 'x' ও 'y' অক্ষ বিবেচনা করে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব '8' এবং দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব 18 একক।

৫। (ক) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর, যে-কোনো ত্রিভুজ ABC-এ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. ৩

অথবা, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

(খ) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষসমূহের সাথে যে কোণগুলো উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের ওপর একটি লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৬। $f(x) = e^x + e^{-x}$ হলে প্রমাণ কর যে, $f(x + y)\, f(x - y) = f(2x) + f(2y)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $e^{\surd x}$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে-কোন **দুইটি**) ঃ

(i) $x^{\cos^{-1} x}$; (ii) $\ln(\cos x)$; (iii) $\frac{\sin x}{x^2 + \cos x}$; (iv) $\tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.

৮। যদি $\ln y = \tan^{-1} x$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 + x^2)y_2 + (2x - 1)y_1 = 0$. ৪

অথবা, $y = \tan x + \sec x$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$.

৯। ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $\cos x$ **অথবা,** $e^{\surd x}$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$-এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$; (ii) $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$; (iii) $\int \cos^{-1} x dx$; (iv) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} dx$; (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + e^x} dx$;

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sin x + \cos x) \, dx$; (iv) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

কুমিল্লা বোর্ড—২০১০

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি ও ভেক্টর

নম্বর

১। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (5, 3) ; এর যে জ্যা (3, 2) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t + 1, 1)$, $(2t + 1, 3)$, $(2t + 2, 2t)$। তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $t = 2$ অথবা $t = -\frac{1}{2}$ হলে, ঐ বিন্দুগুলো সমরেখ হবে।

২। (ক) দেখাও যে, $y = mx$, $y = m_1 x$ এবং $y = b$ রেখা তিনটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_1}\right)$. ৩

অথবা, এমন একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার ওপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দু দিয়ে যায়।

(খ) মূলবিন্দু এবং $4x + 3y - 8 = 0$ ও $x + y = 1$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক (0, 0), (0, 3) এবং (4, 0). ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্র নির্ণয় কর।

৩। (ক) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডিত করে। ৩

অথবা, একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (4, 5) বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

(খ) $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b-এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের একটি জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (4, — 6) বিন্দুতে অবস্থিত।

৪। (ক) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (3, 4), দিকাক্ষ $x + y - 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$. ৩

অথবা, দেখাও যে, $x^2 - 8y^2 = 2$ অধিবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ $3x = \pm 4$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

৫। (ক) $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি x-অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। ৩

অথবা, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে দেখাও যে,

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$$

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = e^x + e^{-x}$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $f(x+y)\,f(x-y) = f(2x) + f(2y)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\cos x$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ ২ × ২=৪

(i) $2x^0 \cos 3x^0$; (ii) $x^{\cos^{-1}x}$; (iii) $\ln (x - \sqrt{x^2 - 1})$; (iv) $\cos^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

৮। যদি $y = (\cos^{-1} x)^2$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 - 2 = 0$. ৪

অথবা, $y = \sec x$ হলে দেখাও যে, $y_2 = y(2y^2 - 1)$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\sin x$ অথবা $\ln(1 + x)$ কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$ বক্ররেখাটি যেসব বিন্দুতে x-অক্ষকে স্পর্শ করে সেসব বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় কর। ৪

অথবা, দেখাও যে, $4e^x + 9e^{-x}$ এর ক্ষুদ্রতম মান 12.

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx$; (ii) $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx$;

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$; (iv) $\int x \tan^{-1} x\, dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int_0^{\log 2} \frac{e^x}{1 + e^x} dx$; (ii) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 3x^4}\, dx$;

(iii) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{4 - x^2}}$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9 - \sin^2 x} dx$.

অথবা, $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষুদ্র অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

যশোর বোর্ড—২০১০

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি ও ভেক্টরস — নম্বর

১। y-অক্ষ ও $(7, 2)$ থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে a-এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি সেটের যে-কোনো উপাদান A ও B বিন্দুর সাথে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। $A(a, b)$ এবং $B(o, b)$ হলে, সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। (ক) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA - OB = 2$ হয়, যেখানে O মূলবিন্দু। ৩

(খ) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা অক্ষ দুইটির সাথে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এবং মূলবিন্দু থেকে উক্ত রেখার ওপর অংকিত লম্ব x-অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। ৩

অথবা, (ক) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) $4\sqrt{2}$ বাহুবিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এর বিপরীত শীর্ষটি x-অক্ষের ওপর অবস্থিত। ঐ বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) একটি বৃত্ত $(1, 2)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $y = 2x$ যদি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তের কোনো জ্যা এর সমীকরণ হয়, তবে উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

(খ) $\frac{4}{5}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট ও $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির ওপর অবস্থিত। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $(1, 1)$ উপকেন্দ্র ও $3x + 4y = 1$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। তার অক্ষেরও সমীকরণ বের কর।

(খ) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক ও দিকাক্ষ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) একক ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা, $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির ওপর লম্ব। ৩

(খ) দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। ৩

অথবা, (ক) প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজ ABC-তে $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

(খ) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি z অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = \ln(\sin x)$ এবং $g(x) = \ln(\cos x)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $e^{2g(a)} - e^{2f(a)} = e^{g(2a)}$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\sec x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে যে-কোনো **দুইটির** অন্তরক সহগ নির্ণয় কর :

(i) $x^{\cos^{-1}x}$; (ii) $\tan(\sin^{-1}x)$; (iii) $\cos^{-1}\{2x\sqrt{(1-x^2)}\}$; (iv) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

৮। যদি $\ln y = \tan^{-1}x$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$. ৪

অথবা, $y = (x+\sqrt{1+x^2})^m$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$.

৯। ম্যাকলরিনের উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ কর। ৪

অথবা, ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\tan^{-1}x$ কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর।

১০। $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, দেখাও যে, $x + \dfrac{1}{x}$ এর গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোনো **দুইটি**) : $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \sin^{-1}x\,dx$. (ii) $\int \dfrac{dx}{e^x+1}$;

(iii) $\int \dfrac{dx}{x^2+6x+25}$; (iv) $\int \sin 5x \sin 3x\,dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোনো **দুইটি**) : $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^1 \dfrac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx$; (ii) $\int_1^{e^2} \dfrac{dx}{x(1+\ln x)^2}$; (iii) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; (iv) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin^3 x\,dx$.

অথবা, $y^2 = x$ এবং $x^2 = y$ পরাবৃত্তদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

চট্টগ্রাম বোর্ড—২০১০

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য : দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। y-অক্ষ ও $(7, 2)$ থেকে $(a, 5)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a-এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5, 6)$, $(-9, 1)$ ও $(-3, -1)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বের কর এবং এর সাহায্যে A থেকে BC-এর ওপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। (ক) $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ এবং $C(5, -2)$, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা BC-এর সমান্তরাল। ৩

(খ) $(2, -1)$ বিন্দু থেকে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার ওপর অংকিত লম্বের পাদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) একটি সরলরেখা $(1, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং অক্ষ দুইটির সাথে প্রথম চতুর্ভাগে ৪ বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ সৃষ্টি করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) y-অক্ষের উপরিস্থিত যে বিন্দু হতে $3y = 4x - 10$ রেখার লম্ব দূরত্ব 4 একক তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৩। (ক) এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, 4)$ এবং যা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। ৩

(খ) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তের স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়।

(খ) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y-অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

৪। (ক) একটি পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র এবং শীর্ষ যথাক্রমে $(0, 0)$ এবং $(-2, -1)$ বিন্দুতে। ৩

(খ) কোনো উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য তার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যকার দূরত্বের সমান এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব 10 ; উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y অক্ষ বিবেচনা করে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 4)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{4}{5}$।

(খ) এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার আড় অক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং অনুবন্ধী অক্ষ x-অক্ষ বরাবর যার শীর্ষবিন্দু দুইটির দূরত্ব 2 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$।

৫। (ক) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$। ৩

অথবা, (ক) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(খ) তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$; দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $\phi(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\phi(y) + \phi(z) = \phi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x.$$

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\sec ax$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে নিচের যে-কোনো **দুইটি** ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(i) $\dfrac{(x^2+1)^2}{\sqrt[3]{x^2}}$; (ii) $x^0 \cos x^0$; (iii) $\cot^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$; (iv) $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

৮। যদি $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ৪
$(a^2 + x^2)y_2 + xy_1 = 0$.

অথবা, যদি $y = \sqrt{4 + 3\sin x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\sin^{-1} x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

অথবা, ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ কে x-এর উর্ধ্বক্রমিক ঘাতে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর।

১০। $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, দেখাও যে, $x + \dfrac{1}{x}$ এর গুরুমান এর লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোনো **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/2} - x^{1/4}}$; (ii) $\displaystyle\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx$;

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sin x}$; (iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \tan x}$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোনো **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{4-x}\,dx$; (ii) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2}}$;

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1 + x^2}\,dx$; (iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt{\sin x}}$.

অথবা, $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = 2x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বরিশাল বোর্ড—২০১০

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি এবং ভেক্টর নম্বর

১। একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে (2, 7) এবং (6, 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (6, 4) ; তৃতীয় শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(t+1, 1)$, $(2t+1, 3)$, $(2t+2, 2t)$. তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $t = 2$ অথবা $t = -\dfrac{1}{2}$ হলে, ঐ বিন্দুগুলো সমরেখ হবে।

২। (ক) $A(h, k)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার ওপর অবস্থিত এবং $B(k, h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার ওপর অবস্থিত। AB এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) একটি সরলরেখা $(-2, -5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষ দুইটি যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, যখন $OA + 2.OB = 0$ হয় এবং O মূলবিন্দু। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 3y + 4 = 0$ ও $3x + 3y - 5 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায়, এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) $2x - y = 3$ রেখার ওপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। এর সমীকরণ ও y-অক্ষ থেকে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তটির জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার ওপর লম্ব। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে গমন করলে এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

(খ) উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(3, 4)$, দিকাক্ষ $x + y - 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$. ৩

অথবা, (ক) $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8। ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) যে অধিবৃত্তের নিয়ামক $3x - 4y = 10$, উপকেন্দ্র $(1, -8)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $|\overrightarrow{AB}|$ নির্ণয় কর। ৩

(খ) $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ হলে, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, দেখাও যে, $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

(খ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = \ln(\sin x)$ এবং $\varphi(x) = \ln(\cos x)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $e^{2\varphi(a)} + e^{2f(a)} = 1$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\ln x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে-কোনো **দুইটি**) ঃ

(i) $x^{\cos^{-1}x}$; (ii) $\sin^{-1}(\sqrt{xe^x})$; (iii) $\frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$; (iv) $\frac{\ln(\cos x)}{x}$.

৮। যদি $\cos\sqrt{y} = x$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0.$ ৪

অথবা, $y = (x + \sqrt{1+x^2})^m$ হলে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0.$

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\tan^{-1} x$ অথবা $(1+x)^n$ কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের ওপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $y = 4e^x + 9e^{-x}$ এর ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int 5\cos 4x \sin 3x\, dx$; (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$;

(iii) $\int \tan^{-1} x\, dx$; (iv) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোন দুইটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx$; (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x\, dx}{\sqrt{\sin x}}$; (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{9-\sin^2 x}$; (iv) $\int_0^2 \frac{x\, dx}{\sqrt{9-2x^2}}$.

অথবা, $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সিলেট বোর্ড—২০১০

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। A ও B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4, -5)$। AB রেখা C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো, যেন AB = 3BC. C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, a-এর মান কত হলে $(a, 2-2a)$, $(1-a, 2a)$ ও $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার ওপর অবস্থিত হবে ?

২। (ক) $ax + by = c$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, p-এর মান a, b, c-তে প্রকাশ কর। ৩

অথবা, দুটি সরলরেখা (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ ও $x - 2y = 7$ রেখাদ্বয়ের সমবিন্দু রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $2x + y + 3 = 0$ এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) $x + 2y + 3 = 0$ রেখার ওপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের $(4, -11)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (4, 3) এবং যা $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। ৩

অথবা, মূলবিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তের ওপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র এবং $x + y + 1 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। তার অক্ষেরও সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৫। উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, \pm 4)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{4}{5}$। এর দিকাক্ষের সমীকরণও নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 - 3y^2 - 2x = 8$ অধিবৃত্তের অক্ষের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৬। $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ হলে, ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

৭। তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$. দেখাও যে, বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। ৩

অথবা, ΔABC-এ BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

ক্যালকুলাস

৮। $f(x) = \ln(\sin x)$ এবং $\phi(x) = \ln(\cos x)$ হলে, দেখাও যে, ৪
$e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$.

অথবা, মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x}$.

৯। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\sec x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) :

(i) $\tan(\sin^{-1} x)$; (ii) $\sec^{-1}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$; (iii) $\frac{x \sin x}{1 + \cos x}$; (iv) $e^{2 \ln(\tan 5x)}$.

১০। যদি $y = px^2 + qx^{-\frac{1}{2}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $2x^2y_2 - xy_1 = 2y$. ৪

অথবা, $\cos\sqrt{y} = x$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 - 2 = 0$.

১১। ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $\sin x$ অথবা e^{-2x}-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১২। a-এর মান কত হলে, $y = ax(1 - x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। ৪

অথবা, দেখাও যে, $x + \frac{1}{x}$ এর গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১৩। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) : $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$; (ii) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$;

(iii) $\int e^x \sin 2x \, dx$; (iv) $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx$.

১৪। মান নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int_0^1 \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}dx$; (ii) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$;

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin x}dx$; (iv) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$.

অথবা, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবন্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দিনাজপুর বোর্ড—২০১৫

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশে উল্লেখিত সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি নম্বর

১। A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4, -5)$। AB রেখাংশ C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন AB = 3BC। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(5, 6)$, $(-9, 1)$ ও $(-3, -1)$। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বের কর এবং এর সাহায্যে A থেকে BC-এর ওপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। (ক) $x+2y+7=0$ রেখাটির অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরিউক্ত খণ্ডিত অংশ কোনো বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

অথবা, A(1, 1), B(3, 4) এবং C(5, −2), ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা BC এর সমান্তরাল।

(খ) x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x+3y=6$ ও $x-2y=7$ রেখা দুইটির সমবিন্দু রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $(1, -2)$ বিন্দু থেকে $7\frac{1}{2}$ একক দূরবর্তী এবং $3x+4y=7$ রেখাটির সমান্তরাল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) একটি বৃত্ত $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং এর কেন্দ্র y-অক্ষের ওপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দু দুইটির সংযোগরেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য বের কর।

(খ) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে -4 একক দূরত্বে y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডন করে। ৩

অথবা, $(1, -3)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $2x-y-4=0$ রেখাকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $(-1, 1)$ উপকেন্দ্র এবং $x+y+1=0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। পরাবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $(y-1)^2=4(x-2)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6। ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y অক্ষ বিবেচনা করে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{1}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 8.

৫। (ক) $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। ৩

অথবা, $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষের সাথে যে কোণগুলো উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

(খ) $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\frac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x.$ ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}}.$$

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\cos x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ

(i) $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$; (ii) $(x^2+1)\tan^{-1}x - x$;

(iii) $x^x \ln(x)$; (iv) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x.$

৮। $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ হলে, দেখাও যে, $y_2 - m^2y = 0.$ ৪

অথবা, $y = e^x \cos x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$

৯। ম্যাক্লরিনের সূত্রটি বিবৃতিসহ প্রমাণ কর। ৪

অথবা, ম্যাক্লরিনের সূত্রের সাহায্যে $(1+x)^n$ এর অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর।

১০। $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষ দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভুজ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ এর গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ ২১/২ × ২= ৫

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$; (ii) $\int e^x \cos x \, dx$;

(iii) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$; (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}.$

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোনো দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int_0^1 xe^{-3x}\,dx$; (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x\,dx$;

(iii) $\int_0^4 y\sqrt{4-y}\,dy$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx.$

অথবা, $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ রেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বাংলাদেশ মাদরাসা শিক্ষা বোর্ড

আলিম (বিজ্ঞান) পরীক্ষা, ২০১০

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি নম্বর

১। একটি বিন্দুর কোটি ভুজের দ্বিগুণ ; যদি এর দূরত্ব (4, 3) বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক হয়, তবে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, প্রমাণ কর যে, $(p, p-2)$, $(p+3, p)$ এবং $(p+2, p+2)$ বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত।

২। যদি $(a, 0)$, $(0, b)$ এবং $(1, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$ ৩

অথবা, $A(h, k)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার ওপর অবস্থিত এবং $B(k, h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার ওপর অবস্থিত। AB-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। $3x - 2y = 1$ এবং $6x - 4y + 9 = 0$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। ৩

অথবা, দেখাও যে, $y = b$, $x = a$, $y = mx$ রেখাত্রয় সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$.

৪। $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (1, 1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x - 7$ রেখার ওপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 1 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

৫। $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b-এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৬। $y^2 + 8x - 2y - 23 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৩

অথবা, উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র (3, 4), নিয়ামক $x + y - 2 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$.

৭। $16x^2+25y^2=400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৮। a-এর মান কত হলে $a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে ? ৩

অথবা, $2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

৯। $\vec{A}=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ ও $\vec{B}=4\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ হলে $(2\vec{A}+\vec{B})$ এবং $(6\vec{A}-3\vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

ক্যালকুলাস

১০। যদি $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(\cos\theta)=\tan^2\frac{\theta}{2}$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

১১। x-এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে x^n-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-কে পরিবর্তনশীল ধরে যে-কোনো দুইটির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(i) $x^3\tan x$; (ii) $e^{\sin 2x}$; (iii) $(\sin x)^{\tan x}$.

১২। $y=\log(x+\sqrt{a^2+n^2})$ হলে, দেখাও যে, ৪

$(a^2+n^2)\,y_2+xy_1=0.$

অথবা, $y=(\sin^{-1}x)^2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)\,y_2-xy_1-2=0.$

১৩। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে e^x অথবা $\tan^{-1}x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১৪। a-এর মান কত হলে, $y=ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে ? ৪

অথবা, $x^3+xy^2-3x^2+4x+5y+2=0$ বক্ররেখার $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

১৫। যে-কোনো একটির যোজিত ফল নির্ণয় কর ঃ ৫

(i) $\int\frac{e^x+1}{\sqrt{e^x}}\,dx$; (ii) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{9-\sin^2 x}}$.

১৬। যে-কোনো একটির মান নির্ণয় কর ঃ ৫

(i) $\int_0^1\frac{1+x}{1-x}\,dx$; (ii) $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$.

ঢাকা বোর্ড—২০০৯

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। $(2, -4)$ ও $(-3, 6)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে x-অক্ষ এবং y-অক্ষরেখা যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ৩

অথবা, দুইটি অক্ষরেখা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে ; A ও B-এর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দেয়া আছে। মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে, OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সংখ্যামান $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$ হবে।

২। (ক) দেখাও যে, $x - 2y + 5 = 0$ রেখাটি $(-3, 6)$ বিন্দু থেকে $x - 2y - 5 = 0$ রেখার উপর অংকিত সকল সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৩

অথবা, দেখাও যে, $y = mx$, $y = m_1x$ এবং $y = b$ রেখা তিনটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $\frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m_1}\right)$.

(খ) $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c + 3)$ রেখা দুইটি মূল বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী। c-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 7y + 11 = 0$ ও $x + 3y - 8 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডিত করে। ৩

অথবা, $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। এর সমীকরণ ও y-অক্ষ থেকে তা কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তাও নির্ণয় কর।

(খ) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তটির জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $y^2 = 16x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(0, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। a, b, c-এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা ও উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, p-এর মান কত হলে $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্তটি $(6, 4)$ বিন্দুগামী হবে। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৫। (ক) $\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একক লম্ব ভেক্টরটি নির্ণয় কর।

অথবা, OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B ; যদি $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$ কে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির ক্ষেত্রে $\vec{A}$-এর দিক বরাবর $\vec{B}$-এর উপাংশ ও অভিক্ষেপের সার্থখ্যিক মান সমান, প্রমাণ কর। ৩

অথবা, দেখাও যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্য বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

ক্যালকুলাস

৬। $\varphi(x) = \cot^{-1}(1 + x + x^2)$ হলে দেখাও যে, $\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2}$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $ln\, x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) :

(i) $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$; (ii) x^x ; (iii) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$; (iv) $\tan^{-1}\left(\dfrac{a + bx}{a - bx}\right)$.

৮। $y = a\cos(ln\, x) + b\sin(ln\, x)$ হলে দেখাও যে, $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 0.$ ৪

অথবা, $y = px + \dfrac{q}{x}$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2y_2 + xy_1 = y$.

৯। ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $ln(1 - x)$ অথবা $\sin^{-1} x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $y(x - 2)(x - 3) - x + 7 = 0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ এর লঘুমান এবং গুরুমান নির্ণয় কর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) : $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \sec^2 x \,\text{cosec}^2 x\, dx$; (ii) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(5 - 4x^2)}}$; (iii) $\int \dfrac{e^{a\tan^{-1}x}}{1 + x^2}dx$; (iv) $\int \dfrac{2x - 1}{x(x - 1)(x - 2)}dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) : $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^{\pi/3} \dfrac{dx}{1 - \sin x}$; (ii) $\int_0^1 \dfrac{1 + x}{1 + x^2}dx$; (iii) $\int_0^4 y\sqrt{4 - y}\, dy$; (iv) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$.

অথবা, $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

রাজশাহী বোর্ড–২০০৯

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য : ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। (7, 5) ও (−2, −1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (2, 0) বিন্দু থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্ব $x = 0$ রেখা থেকে তাদের দূরত্বের তিনগুণ। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

২। (ক) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা (3, 2) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, যেন $OA - OB = 2$ হয়, যখন O মূলবিন্দু। ৩

অথবা, OABC একটি সামান্তরিক ; OA, x-অক্ষ বরাবর অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 2) ; A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) (2, 3) বিন্দু থেকে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি থেকে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব বের কর। ৩

অথবা, মূলবিন্দু থেকে সরলরেখাসমূহের দূরত্ব 7 এবং তারা $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব। রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা x-অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডিত করে। ৩

অথবা, দেখাও যে, A(1, 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। A বিন্দু দিয়ে বৃত্তটির যে ব্যাস অঙ্কন করা যায় তার অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের (4, −11) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তটির জ্যা (−2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8 ; ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (3, 4) উপকেন্দ্র ও (0, 0) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্র (1, − 8), উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{5}$ এবং দিকাক্ষ $3x - 4y = 10$.

৫। (ক) PQR ত্রিভুজে QR, RP ও PQ বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN} = 0$. ৩

অথবা, $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

(খ) a-এর মান কত হলে $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে ? ৩

অথবা, ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, রম্বসের কর্ণগুলো পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

ক্যালকুলাস

৬। $f(x) = ln\,(\sin x)$ এবং $\phi(x) = ln\,(\cos x)$ হলে, দেখাও যে, $e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $ln\,x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ

(i) $\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$; (ii) $ln\,(\sin x^2)$; (iii) $\sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right\}$; (iv) $e^{ax}\tan^2 x$.

৮। যদি $\cos x\sqrt{y} = x$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 - x^2)\,y_2 - xy_1 = 2$. ৪

অথবা, $y = \sin\,(m\sin^{-1} x)$ হলে দেখাও যে, $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{xdy}{dx} + m^2y = 0$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\tan^{-1} x$ অথবা $ln(1 + x)$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। a-এর মান কত হলে $y = ax(1 - x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে? ৪

অথবা, একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $3t + \dfrac{1}{8}t^2$ মিটার অতিক্রম করে। 5 মিনিট পর তার বেগ কত হবে ?

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int 5 \cos 4x \sin 3x \, dx$; (ii) $\int (1 + x^{-1} + x^{-2}) \, dx$; (iii) $\int \frac{\tan x}{ln(\cos x)} dx$; (iv) $\int e^x \sin 2x \, dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx$; (ii) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+ln\, x)^2}$; (iii) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+3x^4} \, dx$; (iv) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$.

অথবা, $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

কুমিল্লা বোর্ড—২০০৯

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি ও ভেক্টর

নম্বর

১। A এবং B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4, -5)$। AB রেখাকে C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $AB = 3BC$। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, x-অক্ষ ও $(-5, -7)$ থেকে $(4, K)$ বিন্দুটির দূরত্ব সমান হল K-এর মান নির্ণয় কর।

২। (ক) যদি (a, b), (a', b'), $(a - a', b - b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, তাদের সংযোগ রেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং $ab' = a'b$ হয়। ৩

অথবা, $x - 4 = 0$, $y - 5 = 0$, $y + 2 = 0$, $x + 3 = 0$ সমীকরণ চারটি একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে। চতুর্ভুজটির কর্ণ দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $(\pm c, 0)$ বিন্দু দুইটি হতে $bx \cos\theta + ay \sin\theta = ab$ এর উপর অংকিত লম্বদ্বয়ের গুণফল b^2 হয় যখন $a^2 = b^2 + c^2$. ৩

অথবা, $5x - 9y + 13 = 0$ ও $9x - 5y + 11 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) $(2, 3)$ বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি y-অক্ষ হতে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। ৩

অথবা, প্রমাণ কর যে, $3x + 4y - 9 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ বৃত্তের একটি স্পর্শক এবং এরূপ দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উল্লিখিত রেখার উপর লম্ব হবে।

(খ) দেখাও যে, $A(1, 1)$ বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত ; A বিন্দু দিয়ে বৃত্তটির যে ব্যাস অংকন করা যায় তার অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $(3, 7)$ এবং $(9, 1)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অংকিত হয়েছে। দেখাও যে, $x + y = 4$ রেখাটি অংকিত বৃত্তের একটি স্পর্শক।

৪। (ক) এরূপ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ $(4, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y = 7$. ৩

অথবা, $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(0, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। a, b, c এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, যে অধিবৃত্তের নিয়ামক $2x + y = 1$, উপকেন্দ্র $(1, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, যেকোন ত্রিভুজ ABC-তে $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. ৩

অথবা, ΔABC-এ BC, CA, AB বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$.

(খ) যদি $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ হয়, তবে ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, ধ্রুবক a-এর মান নির্ণয় কর যেন, $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$ এই তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = \cos(ln\, x)$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(x)\, f(y) - \dfrac{1}{2}\left[f\left(\dfrac{x}{y}\right) + f(xy)\right] = 0$. ৪

অথবা, ফাংশনের সীমার সংজ্ঞা দাও। জ্যামিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $\lim\limits_{\theta \to 0}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right) = 1$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে x^n এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) ঃ

(i) $\sin^2(ln \sec x)$; (ii) $\sec^{-1}\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$; (iii) $\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$; (iv) x^x.

৮। $y = \sqrt{(4 + 3\sin x)}$ হলে, দেখাও যে, $2y\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$. ৪

অথবা, $y = ax^2 + \dfrac{b}{\sqrt{x}}$ হলে, দেখাও যে, $2x^2y_2 - xy_1 - 2y = 0$.

৯। ম্যাকলরিনের ধারাটি বিবৃত কর এবং তা প্রতিষ্ঠা কর। ৪

অথবা, ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে a^x কে বিস্তার কর।

১০। দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যে কোন স্পর্শক কর্তৃক অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশের যোগফল একটি ধ্রুবক। ৪

অথবা, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{x}{ln\, x}$ এর ক্ষুদ্রতম মান e.

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \sin^4 x dx$; (ii) $\int \dfrac{\tan x}{ln(\cos x)} dx$; (iii) $\int \dfrac{xe^x}{(x+1)^2} dx$; (iv) $\int \dfrac{x^2-1}{x^2-4} dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^b \sqrt{b^2 - x^2}\, dx$; (ii) $\int_1^{e^2} \dfrac{dx}{x(1 + ln\, x)^2}$; (iii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sec x + 1}{\sec x} dx$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\tan^3 x \sec^2 x dx$.

অথবা, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

যশোর বোর্ড–২০০৯

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি ও ভেক্টর

নম্বর

১। দেখাও যে, মূলবিন্দু, (– 3, – 2) ও (6, 4) বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখার একটি ত্রিখন্ডন বিন্দু ; অপর সমত্রিখণ্ডন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$। যদি এর ভরকেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে দেখাও যে, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$.

২। (ক) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(1, 1), B(3, 4) এবং C(5, – 2)। AB ও AC-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, তা BC এর সমান্তরাল। ৩

(খ) (2, 3) বিন্দু থেকে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $3x + 5y - 2 = 0$, $2x + 3y = 0$, $ax + by + 1 = 0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু। a ও b এর সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(খ) যদি মূলবিন্দু থেকে $x \sec\theta - y \operatorname{cosec}\theta = k$ ও $x \cos\theta - y \sin\theta = k \cos 2\theta$ রেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে d_1 ও d_2 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $4d_1^2 + d_2^2 = k^2$.

৩। (ক) একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y-অক্ষ দুইটির ধনাত্মক দিক থেকে যথাক্রমে 3 ও 5 অংশ ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তটির একটি জ্যা (– 2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। জ্যা-টির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) দেখাও যে, $x - 3y = 5$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। এই বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শ বিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা x-অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডিত করে।

৪। (ক) $3y^2 - 10x - 12y - 18 = 0$ পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) উপবৃত্তের প্রধান অক্ষ দুইটিকে x ও y-অক্ষ বিবেচনা করে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $= \frac{1}{3}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য = 8. ৩

অথবা, (ক) দেখাও যে, $5x^2 + 9y^2 - 30x = 0$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে ; এর উপকেন্দ্র দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) অধিবৃত্তের অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য 24 এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, ± 13).

৫। (ক) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ হলে $(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{c} \cdot \vec{a})$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

(খ) a-এর মান কত হলে $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে ? ৩

অথবা, (ক) O মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A(1, 1, 1) এবং B(3, 2, – 1) দুইটি বিন্দু হলে $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টর এবং এর সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(খ) ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু M হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$.

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$, $g(x) = \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $f(x+y) = f(x)\,f(y) + g(x)\,g(y)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে e^x-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে নিচের যে কোন **দুইটি** ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(i) $\sqrt{\tan e^{x^2}}$; (ii) $\tan^{-1}(\sin e^x)$; (iii) $\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$; (iv) $(x^x)^x$.

৮। যদি $y = e^{a \sin^{-1} x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1 - x^2)\,y_2 - xy_1 = a^2 y$. ৪

অথবা, $y = px + \frac{q}{x}$ হলে, দেখাও যে, $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 2p$.

৯। x-এর ঊর্ধ্বক্রমিক ঘাতে ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে a^x বা $\cos x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার যেসব বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ ফাংশনটির লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$; (ii) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$; (iii) $\int \frac{\tan(\sin^{-1} x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$; (iv) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}\,dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^{ln 2} \frac{e^x}{1 + e^x}\,dx$; (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta$; (iii) $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 - \sin x}$.

অথবা, $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

চট্টগ্রাম বোর্ড—২০০৯

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4, -5)$। AB-কে C পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন $AB = 3BC$। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $(a, 2-2a)$, $(1-a, 2a)$ ও $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং a-এর মান কত হলে বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হবে ?

২। (ক) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে যেন $OA - OB = 2$, যখন O মূলবিন্দু। ৩

(খ) দুইটি সরলরেখা $(3, 4)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - y + 4 = 0$ রেখার সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে, রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $x = 3, x = 5, y = 4$ এবং $y = 6$ রেখাগুলি দ্বারা উৎপন্ন বর্গের দুইটি কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $4x - 3y - 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল এবং তা হতে 2 একক দূরবর্তী রেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x - 7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) মূলবিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডিত করে।

(খ) $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তটির জ্যা (4, — 6) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। বৃত্তটির জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) p-এর মান কত হলে $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায় ? উপবৃত্তটির অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ (— 2, 3) বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি (0, 5) বিন্দু দিয়ে যায়। a, b, c-এর মান নির্ণয় কর।

(খ) একটি অধিবৃত্ত (6, 4) ও (— 3, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। এর কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং আড় অক্ষ x অক্ষ বরাবর, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

(খ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হবে। ৩

অথবা, (ক) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষের সাথে যে কোণগুলি উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

(খ) a-এর মান কত হলে $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে ?

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = e^x + e^{-x}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $f(x + y)\, f(x - y) = f(2x) + f(2y)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\operatorname{cosec} x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে নিচের যে কোন **দুইটি** ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(i) $\sin^3 x^3$; (ii) $\tan(\sin^{-1} x)$; (iii) $\cos^{-1}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; (iv) $\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$.

৮। $y = ln(\sin x)$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$. ৪

অথবা, যদি $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(1 + x^2)\, y_2 + xy_1 - m^2y = 0$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $ln(1 + x)$-কে অনন্তধারায় বিস্তৃত কর। ৪

অথবা, ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে e^{-2x} কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর।

১০। $y^3 = x^2(2a - x)$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল সে সমস্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$-এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$; (ii) $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx$; (iii) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; (iv) $\int e^{5x}\left\{5\ln x + \frac{1}{x}\right\} dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin^3 x\, dx$; (ii) $\int_0^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$; (iii) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9-\sin^2 x} dx$.

বরিশাল বোর্ড—২০০৯

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি এবং ভেক্টর

নম্বর

১। যদি A(2, 5), B(5, 9) এবং D(6, 8) বিন্দু তিনটি ABCD রম্বসের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দু C এর স্থানাঙ্ক এবং রম্বসটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

অথবা, যদি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $A(x, y)$, B(1, 2) এবং C(2, 1) হয় এবং তার ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক হয়, তবে দেখাও যে, $x + y = 15$.

২। (ক) $ax + by = c$ এবং $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, p-এর মান a, b, c-তে প্রকাশ কর। ৩

(খ) (2, 3) বিন্দু হতে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে বিন্দুটি থেকে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $4x - 2y + 7 = 0$ সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যা (2, 3), (− 2, 4) বিন্দু দুইটি থেকে সমদূরবর্তী।

(খ) $3x + 4y - 11 = 0$ এবং $12x - 5y - 2 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) একটি বৃত্ত (1, 2) ও (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়। ৩

অথবা, (খ) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (4, 5) বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

(খ) $3x + ay - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। a-এর মান নির্ণয় কর।

৪। (ক) এরূপ পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষ (2, 3) বিন্দুতে অবস্থিত এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y = 6$; এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর। ৩

(খ) p-এর মান কত হলে $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? এর অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য কত ? ৩

অথবা, (ক) $x^2 = 4(1 - y)$ প্যারাবোল্যার শীর্ষবিন্দু ও ফোকাসের স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) একটি অধিবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি বরাবর। অধিবৃত্তটি (− 2, 1) এবং (− 3, − 2) বিন্দুগামী হলে অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) PQR ত্রিভুজের QR, RP এবং PQ বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M, N হলে, প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{RN} = 0$.

(খ) যদি $\vec{u} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{v} = \lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়, তবে λ-এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = e^x + e^{-x}$ হয় তবে দেখাও যে, $f(x+y).f(x-y) = f(2x) + f(2y)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে e^{mx} এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ ২×২=৪

(i) $\tan(\sin^{-1} x)$; (ii) $\tan^{-1} \dfrac{a+bx}{a-bx}$; (iii) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$; (iv) $(\cot x)^{\tan x}$.

৮। যদি $y = (p + qx)e^{-2x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $y_2 + 4y_1 + 4y = 0$. ৪

অথবা, যদি $y = \sin(\sin x)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $y_2 + y_1 \tan x + y \cos^2 x = 0$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $ln\ (1-x)$ অথবা e^{-2x} কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখার যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব সেসব বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

অথবা, দেখাও যে, $x + \dfrac{1}{x}$ এর গুরুমান, লঘুমানের চেয়ে ক্ষুদ্রতর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2}$ × ২=৫

(i) $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx$; (ii) $\int \dfrac{dx}{e^x + e^{-x}}$; (iii) $\int \dfrac{dx}{x(1 + ln\ x)}$; (iv) $\int \dfrac{1}{1 + \tan x} dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2}$ × ২=৫

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx$; (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sqrt{\sin x}\, dx$; (iii) $\displaystyle\int_2^4 ln\ 2x dx$; (iv) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \sqrt{1+3x^4}\, dx$.

অথবা, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সিলেট বোর্ড—২০০৯

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। একটি সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, −4) এবং (0, 4) হলে তৃতীয় শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, যদি A(2, 5), B(5, 9) এবং D(6, 8) বিন্দু তিনটি ABCD রম্বসের শীর্ষ বিন্দু হয় তা হলে C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং রম্বসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২। (ক) $5x + 4y = 20$ সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে এরূপ বিন্দুদ্বয়ের সাথে মূল বিন্দুর সংযোগ রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) $(2, 3)$ বিন্দু থেকে $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

অথবা, (ক) $(8, 5)$ ও $(-4, -3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যার ঢাল 1 এবং মূলবিন্দু হতে রেখার দূরত্ব 4 একক।

৩। (ক) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(1, 2)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে। ৩

(খ) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(1, -3)$ এবং বৃত্তটি $2x - y - 4 = 0$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে। ৩

অথবা, (ক) $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের উপর এমন বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার ভুজ 2.

(খ) দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1, 8)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

৪। $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষ, অক্ষরেখা ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র ও শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $(3, 4)$ ও $(0, 0)$।

৫। একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(1, \sqrt{6})$ ও $(3, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায়। ৩

অথবা, $16x^2 - 9y^2 = 144$ অধিবৃত্তের শীর্ষ উপকেন্দ্র, উৎকেন্দ্রতা এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৬। যদি ABC ত্রিভুজে BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E এবং F হয় তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, মধ্যমা তিনটির যোগফল শূন্য। ৩

অথবা, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

৭। মূলবিন্দু '0' সাপেক্ষে $A(2, -1, 7)$, $B(-4, 5, 0)$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টরটির সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৮। যদি $y = f(x) = \dfrac{4x - 7}{2x - 4}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f^{-1}(x) = f(x)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

৯। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে x^n এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ

(i) $x^{\frac{1}{x}}$; (ii) $\sin^2 \{ln (\sec x)\}$; (iii) $\tan^{-1} \dfrac{4\sqrt{x}}{1 - 4x}$; (iv) $\dfrac{ln (\cos x)}{x}$.

১০। $y = \sqrt{4 + 3 \sin x}$ হলে, দেখাও যে, $2y \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$. ৪

অথবা, $y = e^{a \sin^{-1} x}$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2) y_2 - xy_1 = a^2 y$.

১১। ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $ln (1 - x)$ অথবা $\tan^{-1} x$ কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১২। $y = x^2 + \sqrt{1 - x^2}$ বক্ররেখার উপর যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

অথবা, দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 + 6x + 3$ এর কোন বৃহত্তম অথবা ক্ষুদ্রতম মান নেই।

১৩। যোগজ নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int 5\cos 4x \sin 3x\, dx$; (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$; (iii) $\int \frac{\tan x}{ln(\cos x)} dx$; (iv) $\int x^2 e^x dx$.

১৪। মান নির্ণয় কর (যে কোন দুইটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; (ii) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$; (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\tan^3 x \sec^2 x dx$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9-\sin^2 x} dx$.

অথবা, $y^2 = 4x$ পরাবৃত্ত এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দিনাজপুর বোর্ড—২০০৯

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ ডান পাশের সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। $A(x, y)$, $B(-6, -3)$ এবং $C(6, 3)$ বিন্দুগুলি একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু। A বিন্দুটি এমন একটি সেটের সদস্য যে, সেটটির যে কোন বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর অংকিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য একটি স্থির সংখ্যা 5। দেখাও যে, সঞ্চারপথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$. ৩

অথবা, কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক $(3, -4)$ এবং $(-6, 5)$। এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু $(-2, -1)$ হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

২। (ক) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, যেন $OA - OB = 2$ হয়, যখন O মূলবিন্দু। ৩

অথবা, $A(h, k)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $B(k, h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দুইটি সরলরেখা $(6, 7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x + 4y = 11$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $4y - 3x = 3$ এবং $3y - 4x = 5$ রেখা দুইটির অন্তর্গত স্থূল কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) একটি বৃত্ত $(2, 1)$, $(-6, 5)$ ও $(-3, -4)$ বিন্দু তিনটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $y = 2x$ যদি $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তের কোন জ্যা-এর সমীকরণ হয়, তবে উক্ত জ্যা-কে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের একটি জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু $(4, -6)$ বিন্দুতে অবস্থিত।

৪। (ক) $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে গমন করলে এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $y = ax^2 + bx + c$ পরাবৃত্তটির শীর্ষ $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং এটি $(0, 5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। a, b, c-এর মান নির্ণয় কর।

(খ) p-এর মান কত হলে $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{25} = 1$ উপবৃত্তটি (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, যে অধিবৃত্তের নিয়ামক $2x + y = 1$, উপকেন্দ্র (1, 1) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) PQR ত্রিভুজের QR, RP ও PQ বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN} = 0$. ৩

অথবা, $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\ AB\ |$-এর মান নির্ণয় কর।

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৩

অথবা, $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $f(y) = x$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3\theta - \tan^3\theta}{\tan\theta}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $ln\ x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) ঃ

(i) $2x^0 \cos 3x^0$; (ii) $x^{\cos^{-1}x}$; (iii) $(\cot x)^{\tan x}$; (iv) $\sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$.

৮। $y = \frac{ln\ (x)}{x}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ ln(x) - 3}{x^3}$. ৪

অথবা, যদি $y = e^{\tan^{-1}x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)\,y_2 + (2x-1)\,y_1 = 0$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\tan^{-1} x$ কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

অথবা, ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\frac{1}{1+x}$ কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর।

১০। $x^2 + 4y^2 = 8$ উপবৃত্তের যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

অথবা, কোন গতিশীল কণার t সময়ে একটি সরলরেখার উপর দূরত্ব s-কে $s = at^2 + bt + c$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে a, b, c ধ্রুবক। যদি t সময় পরে কণাটির বেগ v হয়, তবে দেখাও যে, $4a(s-c) = v^2 - b^2$.

১৩। যোগজ নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int 5\cos 4x \sin 3x\, dx$; (ii) $\int \frac{\tan x}{ln(\cos x)} dx$; (iii) $\int e^x \sin 2x\, dx$; (iv) $\int \frac{x\, dx}{(x-1)(x^2+1)}$.

১৪। মান নির্ণয় কর (যে কোন **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$; (ii) $\int_0^{ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$; (iii) $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\tan^3 x \sec^2 x\, dx$.

অথবা, দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{16a^2}{3}$.

বাংলাদেশ মাদরাসা শিক্ষা বোর্ড

আলিম (বিজ্ঞান) পরীক্ষা, ২০০৯

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। ABCD আয়তক্ষেত্রের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A(3, 2), B(2, − 1), C(8, − 3); এর চতুর্থ শীর্ষবিন্দু D-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$, $(at_3^2, 2at_3)$। যদি উহার ভরকেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে দেখাও যে, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$.

২। একটি সরলরেখা (1, 2) এবং (3, 4) বিন্দু দিয়ে যায় এবং (x, y) তার উপর একটি বিন্দু। দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$. ৩

অথবা, (2, − 1) বিন্দু থেকে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৩। মূলবিন্দু থেকে 7 একক দূরত্বে এবং $3x - 4y + 7 = 0$ রেখার উপর লম্ব, এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, দুইটি সরলরেখা (− 1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x - y + 7 = 0$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (4, 5) বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। ৩

অথবা, $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্তে এবং $x = 3$ সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী একটি বৃত্তের কেন্দ্র (6, 0) হলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক $5x - 12y - 9 = 0$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, প্রমাণ কর যে, $x - 3y = 5$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণও নির্ণয় কর।

৬। $y^2 = 4px$ পরাবৃত্তটি (3, − 2) বিন্দু দিয়ে গমন করলে এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, দেখাও যে, $lx + my + n = 0$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $ln = am^2$ হয়।

৭। যে অধিবৃত্তের নিয়ামক $2x + y = 1$, উপকেন্দ্র (1, 1) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ অধিবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু ও উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

৮। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} - 4k$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর লব্ধি ভেক্টর-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$. $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

৯। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু। ৩

অথবা, $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে, $|\overrightarrow{AB}|$ নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

১০। যদি $y = f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-4}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(y) = x$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$.

১১। x-এর সাপেক্ষে মূল নিয়মে e^x-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-কে পরিবর্তনশীল ধরে যে কোন **দুইটির** অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(i) $(x^x)^x$; (ii) $\sin^2 \{ln\ (\sec x)\}$; (iii) $\cos \sqrt{x}$

১২। $y = e^{a \sin^{-1} x}$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)\, y_2 - xy_1 - a^2y = 0$. ৪

অথবা, $y = px^2 + qx^{-1/2}$ হলে দেখাও যে, $2x^2y_2 - xy_1 = 2y$.

১৩। ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $\cos x$ অথবা $\log_e (1-x)$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১৪। $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্ররেখার যেসব বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $x^2 - y^2 = 7$ বক্ররেখার $(-4, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

১৫। যে কোন **একটির** যোজিত ফল নির্ণয় কর ঃ (i) $\int x^2 a^{x^3}\, dx$; (ii) $\int e^x \sin x\, dx$. ৫

১৬। যে কোন **একটির** মান নির্ণয় কর ঃ (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\, d\theta$; (ii) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+3x^4}\, dx$. ৫

ঢাকা বোর্ড—২০০৮

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি নম্বর

১। A এবং B বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, 4)$ এবং $(4, -5)$। AB রেখা C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন AB = 3 BC। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (5, 6), (− 9, 1) ও (− 3, − 1)। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A থেকে BC-এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। (ক) $A(h, k)$ বিন্দুটি $6x - y = 1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $B(k, h)$ বিন্দুটি $2x - 5y = 5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, OABC একটি সামান্তরিক। OA, x-অক্ষ বরাবর অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 2)। AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $(2, -1)$ বিন্দু থেকে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $4x - 3y = 8$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 2 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখাগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) $2x - y = 3$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, -2)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (4, 3) এবং যা $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তকে বহিস্থভাবে স্পর্শ করে।

(খ) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়। ৩

অথবা, মূল বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (3, 4) উপকেন্দ্র এবং (0, 0) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $\frac{4}{5}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট এবং $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের অক্ষ দুটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার দিকাক্ষ $2x + y = 1$, উপকেন্দ্র (1, 1) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$.

৫। (ক) $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব। ৩

অথবা, $\vec{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\vec{AB}|$ নির্ণয় কর।

(খ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। ৩

অথবা, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে,

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$$

ক্যালকুলাস

৬। $f(x) = e^x + e^{-x}$ হলে প্রমাণ কর যে, $f(x+y)\, f(x-y) = f(2x) + f(2y)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$.

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে x^n-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) :

(i) $x^{\frac{1}{x}}$; (ii) $x\sqrt{\sin x}$; (iii) $\tan^{-1}(e^x)$; (iv) $\frac{x \sin x}{1 + \cos x}$.

৮। $y = \sqrt{(4 + 3\sin x)}$ হলে, দেখাও যে, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$. ৪

অথবা, $x = \sin\sqrt{y}$ হলে, দেখাও যে, $(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 - 2 = 0$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\cos x$-কে অনন্তধারায় বিস্তৃত কর। ৪

অথবা, ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে e^{mx}-কে অনন্তধারায় বিস্তৃত কর।

১০। a-এর মান কত হলে, $y = ax(1 - x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে ? ৪

অথবা, গুরুমান ও লঘুমানগুলো নির্ণয় কর : $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x, \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$.

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) : ২½ × ২ = ৫

(i) $\int \cos^2 x\, dx$; (ii) $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx$; (iii) $\int \frac{\ln(\sec^{-1} x)}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$; (iv) $\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ $2\frac{1}{2} \times 2 = 5$

(i) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$; (ii) $\int_1^3 \frac{1}{x} \cos(\ln x)\, dx$; (iii) $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1-\sin x} dx$; (iv) $\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$.

অথবা, দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুটি দ্বারা আবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{16}{3}a^2$.

রাজশাহী বোর্ড—২০০৮

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি নম্বর

১। (2, — 4) ও (— 3, 6) বিন্দু দুটির সংযোগ রেখাকে x-অক্ষ এবং y-অক্ষরেখা যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(t+1, 1)$, $(2t+1, 3)$, $(2t+2, 2t)$ হলে এর **ক্ষেত্রফল** নির্ণয় কর। t-এর মান কত হলে ঐ বিন্দুগুলো সমরেখ হবে ?

২। (ক) একটি সরলরেখার অক্ষ দুটির মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ (6, 2) বিন্দুতে 2 ঃ 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, দেখাও যে, $x = a$, $y = b$ এবং $y = mx$ রেখা তিনটি যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2m}(b - ma)^2$.

(খ) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 7y + 11 = 0$ ও $x + 3y - 8 = 0$ রেখা দুটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $4x + 3y = c$ এবং $12x - 5y = 2(c+3)$ রেখা দুটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী। c-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর।

৩। (ক) একটি বৃত্ত (3, 5) ও (6, 4) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং এর কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত; বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x - 7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b-এর মান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, মূল বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শক দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) (— 1, 1) উপকেন্দ্র এবং $x + y + 1 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। পরাবৃত্তটির অক্ষরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2 = 4(1 - y)$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) p-এর মান কত হলে $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তের অক্ষ দুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।

৫। (ক) এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুটির উপর লম্ব। ৩

অথবা, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজ ABC-তে $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। ৩

অথবা, $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষের সাথে যে কোণগুলো উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x)=b\dfrac{x-a}{b-a}+a\dfrac{x-b}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $f(a)+f(b)=f(a+b)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\operatorname{cosec} x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে-কোন **দুইটি**) ঃ

(i) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; (ii) $\tan(\sin^{-1}x)$; (iii) $\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$; (iv) x^{x^x}.

৮। $y=\sqrt{(4+3\sin x)}$ হলে, দেখাও যে, ৪

$$2y\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=4.$$

অথবা, যদি $\ln y=\tan^{-1}x$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1+x^2)\,y_2+(2x-1)\,y_1=0$.

৯। ম্যাক্লরিনের উপপাদ্যের সাহায্যে e^{-2x}-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

অথবা, ম্যাক্লরিনের সূত্রের সাহায্যে a^x-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর।

১০। $y=x^3-3x^2-2x+1$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষ দুইটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভুজ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $f(x)=4e^x+9e^{-x}$-এর ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোন **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২}\times ২=৫$

(i) $\int\sec^2 x\operatorname{cosec}^2 x\,dx$; (ii) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$; (iii) $\int\dfrac{x\,dx}{x^4+1}$; (iv) $\int\dfrac{1}{1+\tan x}dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোন **দুইটি**) ঃ $২\frac{১}{২}\times ২=৫$

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\sin x}dx$; (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin^3 x\,dx$;

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin x\sin 2x\,dx$; (iv) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}x\tan^{-1}x\,dx$.

অথবা, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

কুমিল্লা বোর্ড—২০০৮

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য : দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি ও ভেক্টর

নম্বর

১। $r(1 + \cos\theta) = 2$ সমীকরণটিকে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর। সমীকরণটি কী নির্দেশ করে ? ৩

অথবা, প্রমাণ কর যে, $(p, p-2)$, $(p+3, p)$ এবং $(p+2, p+2)$ বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে।

২। (ক) A(1, 1), B(3, 4) এবং C(5, −2) ত্রিভুজ ABC-এর শীর্ষত্রয়। AB ও AC-এর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর তা BC-এর সমান্তরাল।

অথবা, এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x - 2y - 1 = 0$ ও $2x + 3y + 2 = 0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং যার ঢাল $\tan 45°$।

(খ) এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ রেখার উপর লম্ব এবং প্রদত্ত রেখা এবং x-অক্ষরেখা যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দু দিয়ে যায়। ৩

অথবা, $12x - 5y = 7$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, 1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে $x + y = 3$ রেখার উপর অবস্থিত। ৩

অথবা, (−4, 3) ও (12, −1) বিন্দু দুইটির সংযোগরেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটির দ্বারা y-অক্ষের খণ্ডিত অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়। ৩

অথবা, (3, −1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত বৃত্তটি x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $5x^2 + 30x + 2y + 59 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু (4, −3) বিন্দুতে অবস্থিত, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 এবং অক্ষটি x-অক্ষের সমান্তরাল।

(খ) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (0, 2), উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং দিকাক্ষের সমীকরণ $y + 4 = 0$; তার উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার দিকাক্ষের সমীকরণ $2x + y = 1$, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (1, 1) এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$।

৫। (ক) এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব। ৩

অথবা, $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। ৩

অথবা, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজ ABC-তে

$$C = a\cos B + b\cos A.$$

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = b.\frac{x-a}{b-a} + a.\frac{x-b}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে, ৪

$f(a) + f(b) = f(a+b)$.

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}.$$

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে a^x $(a > 0)$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে-কোন দুইটি) ঃ

(i) $\ln (e^x + e^{-x})$; (ii) $\tan(\sin^{-1} x)$; (iii) $\sin^{-1} \{2ax \sqrt{1-a^2x^2}\}$; (iv) $\dfrac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}$.

৮। $x = \sin \sqrt{y}$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\, y_2 - xy_1 - 2 = 0.$ ৪

অথবা, $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ হলে, দেখাও যে, $2x\dfrac{dy}{dx} + y = 2\sqrt{x}.$

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\ln(1+x)$ অথবা $\tan^{-1} x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, দেখাও যে, $x + \dfrac{1}{x}$-এর গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোন দুইটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$; (ii) $\displaystyle\int \frac{x^2 \tan^{-1} x^3}{1+x^6}\, dx$;

(iii) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$; (iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\tan x}$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোন দুইটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2}\, dx$;

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan^3 x + \tan x)\, dx$; (iv) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x} \cos (\ln x)\, dx$.

অথবা, দেখাও যে, $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\dfrac{16}{3} a^2$।

যশোর বোর্ড—২০০৮

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি ও ভেক্টরস

নম্বর

১। (7, 7) ও (− 5, − 10) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে x-অক্ষরেখা যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা বের কর ; বিভাজন বিন্দুর ভুজ বের কর। ৩

অথবা, a-এর মান কত হলে $(a, 2-2a)$, $(1-a, 2a)$ ও $(-4-a, 6-2a)$ বিন্দু তিনটি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত হবে ?

২। (ক) A(2, 1) ও B(5, 2) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। নির্ণেয় রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

(খ) মূলবিন্দু এবং $x + 3y - 12 = 0$ রেখার অক্ষ দুইটির মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশের ত্রিখণ্ডক বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $3x - 4y + 8 = 0$ রেখার সমান্তরাল দিকে $3x + y + 4 = 0$ রেখা থেকে $(1, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

(খ) দুইটি সরলরেখা $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $x - 2y = 3$ রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। (ক) $x^2 + y^2 = 13$ বৃত্তের যে বিন্দুতে কোটি 2, উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, -5)$ এবং এটি মূল বিন্দু দিয়ে যায়। তার সমীকরণ এবং অক্ষ দুইটি থেকে তা কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। c-এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) একটি বৃত্ত $(1, 2)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) যে পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র $(0, 0)$ এবং শীর্ষবিন্দু $(-2, -1)$ তার দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) $\frac{4}{5}$ উৎকেন্দ্রিকতাবিশিষ্ট ও $\left(\frac{10}{3}, \sqrt{5}\right)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী উপবৃত্তের অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির উপর অবস্থিত। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) p-এর মান কত হলে $4x^2 + py^2 = 80$ উপবৃত্তটি $(0, \pm 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং অক্ষ দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) যে অধিবৃত্তের নিয়ামক $2x + y = 1$, উপকেন্দ্র $(1, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। ৩

(খ) ধ্রুবক λ-এর মান নির্ণয় কর যেন $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\lambda\hat{i} - \hat{j} + \lambda\hat{k}$ এই তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকে। ৩

অথবা, (ক) $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষরেখাগুলোর সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

(খ) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা তার তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $f(x) = e^x + e^{-x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ৪

$$f(x + y)\, f(x - y) = f(2x) + f(2y).$$

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2}.$$

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে a^x-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে নিচের যে-কোন দুটি ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(i) $\log_x a$; (ii) $\tan^{-1} \frac{2\sqrt{x}}{1 - x}$; (iii) $x^{\frac{1}{x}}$; (iv) $\sin^2 (\ln x^2)$.

৮। যদি $\cos \sqrt{y} = x$ হয়, তবে দেখাও যে, ৪

$$(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 - 2 = 0.$$

অথবা, $y = \sec x$ হলে দেখাও যে, $y_2 = y(2y^2 - 1)$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\tan^{-1} x$ অথবা $\ln(1 + x)$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। a-এর মান কত হলে $y = ax(1 - x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে ? ৪

অথবা, $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ বক্ররেখার উপর এমন বিন্দুগুলো নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকসমূহ x-অক্ষের উপর লম্ব হয়।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$; (ii) $\int \frac{\tan x \, dx}{\ln(\cos x)}$;

(iii) $\int \frac{dx}{1 + \tan x}$; (iv) $\int \cos^{-1} x \, dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \, dx$; (ii) $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \, dx$;

(iii) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$; (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \sin x}$.

অথবা, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

চট্টগ্রাম বোর্ড—২০০৮

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি নম্বর

১। দেখাও যে, মূলবিন্দু $(-3, -2)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার একটি ত্রিখণ্ডন বিন্দু, অপর সমত্রিখণ্ডন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলো $A(-3, -2)$, $B(-3, 9)$ এবং $C(5, -8)$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA-এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। (ক) $x + 2y + 7 = 0$ রেখাটির অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। উপরোক্ত খণ্ডিতাংশ কোন বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

(খ) $A(2, 1)$ ও $B(5, 2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। রেখাটি y-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $2x - 7y + 11 = 0$ ও $x + 3y - 8 = 0$ রেখা দুটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $(0, 1)$ বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ এবং $5x + 12y - 16 = 0$-এর অন্তর্ভূত কোণদ্বয়ের একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

৩। (ক) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (6, 0) এবং যা $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্ত ও $x = 3$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। ৩

(খ) $x^2 + y^2 - 4x^2 - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। c-এর মান ও স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, 2) ও (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায়, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়।

৪। (ক) (3, 4) উপকেন্দ্র ও (0, 0) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্র (− 1, 1), দিকাক্ষের সমীকরণ $x - y + 3 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$। ৩

অথবা, (ক) উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়কে স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা (2, 2) এবং (3, 1) বিন্দু দিয়ে যায়। এর উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

(খ) $x^2 - 3y^2 - 2x = 8$ অধিবৃত্তের অক্ষের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রিকতা এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

৫। (ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৩

(খ) $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $\vec{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\vec{AB}|$ নির্ণয় কর।

(খ) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৬। যদি $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $f(y) = x$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\log_a x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে নিচের যে-কোন দুটি ফাংশনের অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(i) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; (ii) $x^{\ln(x)}$;

(iii) $\frac{x \sin x}{1 + \cos x}$; (iv) $\sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$.

৮। $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, হলে, দেখাও যে, ৪

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + m^2y = 0.$$

অথবা, $y = \sec x$ হলে, দেখাও যে, $y_2 = y(2y^2 - 1)$.

৯। ম্যাকলরিনের উপপাদ্যটি বর্ণনাসহ প্রতিষ্ঠা কর। ৪

অথবা, ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\sin x$-কে অনন্ত ধারায় বিস্তৃত কর।

১০। $y = x^3 - 2x^2 + 4$ বক্ররেখার (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, যদি কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমহারে বৃদ্ধি পায়, তবে দেখাও যে, তার ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার তার ব্যাসার্ধের সাথে সমানুপাতিক হবে।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$; (ii) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$;

(iii) $\int \ln x \, dx$; (iv) $\int \frac{3x^2}{1 + x^6} dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 3x^4} \, dx$; (ii) $\int_1^{\sqrt{3}} x \tan^{-1} x \, dx$;

(iii) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x} dx$; (iv) $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 + \sin x} dx$.

বরিশাল বোর্ড—২০০৮

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি নম্বর

১। কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্ত দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, − 4) এবং (− 6, 5)। এর তৃতীয় শীর্ষবিন্দু (− 2, − 1) হলে, চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $(a, 0)$ এবং $(0, a)$ বিন্দু দুটি থেকে একটি সেটের বিন্দুসমূহের দূরত্বের বর্গের অন্তরফল সর্বদা $2a$। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

২। (ক) একটি সরলরেখা (− 2, − 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x ও y অক্ষ দুটিকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে, যখন OA + 2.OB = 0 এবং O মূলবিন্দু। তার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) দুইটি সরলরেখা (− 1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x - y + 7 = 0$ রেখার সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) x অক্ষের সমান্তরাল এবং $4x + 3y = 6$ এবং $x - 2y = 7$ রেখা দুইটির সমবিন্দু রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, (± 4, 0) বিন্দু দুটি থেকে $3x \cos\theta + 5y \sin\theta = 15$ এর উপর অংকিত লম্ব দুটির গুণফল θ মুক্ত হবে।

৩। (ক) একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং x ও y অক্ষ দুটির ধনাত্মক দিক থেকে যথাক্রমে 3 এবং 5 অংশ ছেদ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) $px + qy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, (p, q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। ৩

অথবা, (ক) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (6, 0) এবং যা $x^2 + y^2 - 4 = 0$ বৃত্ত এবং $x = 3$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়।

(খ) $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তটির জ্যা (− 2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪। (ক) $(-8, -2)$ উপকেন্দ্র এবং $2x - y - 9 = 0$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

(খ) যে অধিবৃত্তের নিয়ামক $2x + y = 1$, উপকেন্দ্র $(1, 1)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{3}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (ক) $y^2 = 8x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 8। ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(খ) $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা, উপকেন্দ্র দুটির স্থানাঙ্ক এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) দেখাও যে, $\vec{a} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। ৩

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজ ABC-তে ৩

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

অথবা, (ক) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যের অর্ধেক।

(খ) $\vec{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\vec{AB}|$ নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

৬। $f(x) = b\frac{x-a}{b-a} + a\frac{x-b}{a-b}$ হলে দেখাও যে, $f(a) + f(b) = f(a+b)$. ৪

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2}.$$

৭। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\cos x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ

(i) $5\, e^x \log_a x$; (ii) $x^2 \sin^{-1}(1-x)$; (iii) $\frac{x \sin x}{1 + \cos x}$; (iv) x^x.

৮। $y = Ae^{mx} + Be^{-mx}$ হলে, দেখাও যে, $y_2 - m^2 y = 0$. ৪

অথবা, $y = (\sin^{-1} x)^2$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 - 2 = 0$.

৯। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে a^x অথবা $\sin x$-কে অনন্তধারায় বিস্তৃত কর। ৪

১০। a-এর মান কত হলে $y = ax(1 + x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে তার স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করবে ? ৪

অথবা, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$-এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

১১। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$; (ii) $\int \sin 5x \sin 3x\, dx$;

(iii) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}} dx$; (iv) $\int x \ln(x)\, dx$.

১২। মান নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ $২\frac{১}{২} \times ২ = ৫$

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} dx$; (ii) $\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$;

(iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$; (vi) $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

অথবা, $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সিলেট বোর্ড—২০০৮

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি নম্বর

১। দেখাও যে, মূল বিন্দু $(-3, -2)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগরেখার একটি ত্রিখণ্ডন বিন্দু। অপর সমত্রিখণ্ডন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি চতুর্ভুজ ABCD এর কৌণিক বিন্দু A, B, C, D এর স্থানাঙ্ক $(1, 2)$, $(-5, 6)$, $(7, -4)$ এবং $(K, -2)$। তার ক্ষেত্রফল শূন্য হলে, K-এর মান নির্ণয় কর।

২। OABC একটি সামান্তরিক; OA, x অক্ষ বরাবর অবস্থিত। OC রেখার সমীকরণ $y = 2x$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 2)$; A ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং AC কর্ণের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, AB ও AC রেখা দুইটির সমীকরণ যথাক্রমে $y = 2x + 1$ এবং $y = 4x - 1$. AB এর উপর অংকিত লম্ব AP এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

৩। দেখাও যে, $(0, 1)$ বিন্দুটি $12x - 5y + 1 = 0$ ও $5x + 12y - 16 = 0$ এর অন্তর্ভূত কোণদ্বয়ের একটি সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। ৩

অথবা, (a, b) বিন্দুটি $3x - 4y + 1 = 0$ এবং $4x + 3y + 1 = 0$ সরলরেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, $a + 7b = 0$ অথবা, $7a - b + 2 = 0$.

৪। $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x - 7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র $(4, 5)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

৫। b-এর মান কত হলে $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে ? ৩

অথবা, $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তটির জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

৬। $x^2 + 2y - 8x + 7 = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $(1, 1)$ উপকেন্দ্র ও $3x + 4y = 1$ দিকাক্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। তার অক্ষেরও সমীকরণ বের কর।

৭। p-এর মান কত হলে $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ উপবৃত্তটি $(6, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে ? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

৮। a-এর মান কত হলে $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে ? ৩

অথবা, $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় কর।

৯। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজ ABC-তে, ৩

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

অথবা, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে,

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$$

ক্যালকুলাস

১০। $f(x) = \ln(\sin x)$ এবং $\phi(x) = \ln(\cos x)$ হলে, দেখাও যে, ৪

$e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$.

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 7x}{3x^2}$.

১১। মূল নিয়মে x-এর সাপেক্ষে $\ln x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, x-এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ

(i) $x^{\cos^{-1}x}$; (ii) $\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$; (iii) $\cot^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}$; (iv) $2x^0\cos 3x^0$.

১২। $y=(\cos^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}=x\dfrac{dy}{dx}+2.$ ৪

অথবা, যদি $y=px^2+qx^{-\frac{1}{2}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}=2y.$

১৩। ম্যাকলরিনের ধারার সাহায্যে $\cos x$ অথবা e^x-এর অনন্ত ধারায় বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ৪

১৪। $y=x^3-3x^2-2x+1$ বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো অক্ষ দুটির সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভুজ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, $f(x)=x^3-3x^2-45x+13$-এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

১৫। যোগজ নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ $২\frac{১}{২}\times ২=৫$

(i) $\int\dfrac{dx}{1+\tan x}$; (ii) $\int\cos^4 x\,dx$; (iii) $\int\dfrac{x^2}{x^2-4}dx$; (iv) $\int x\tan^{-1}x\,dx$.

১৬। মান নির্ণয় কর (যে-কোন দুটি) ঃ $২\frac{১}{২}\times ২=৫$

(i) $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\,dx$; (ii) $\int_0^{\ln 2}\dfrac{e^x}{1+e^x}dx$;

(iii) $\int_0^{\pi/4}\dfrac{1}{1+\sin x}dx$; (iv) $\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx$.

অথবা, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বাংলাদেশ মাদরাসা শিক্ষা বোর্ড

আলিম (বিজ্ঞান) পরীক্ষা, ২০০৮

গণিত (তত্ত্বীয়)

(জ্যামিতি ও ক্যালকুলাস)

[দ্রষ্টব্য ঃ দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সংখ্যা প্রশ্নের পূর্ণমান জ্ঞাপক।]

জ্যামিতি

নম্বর

১। $(0, a)$ এবং $(0, -a)$ নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয় হতে P বিন্দুর দূরত্বের যোগফল সর্বদা 2 একক। প্রমাণ কর যে, P-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ হবে— ৩

$x^2+(1-a^2)\,y^2=1-a^2.$

অথবা, একটি বিন্দুর কোটি ভুজের দ্বিগুণ। যদি এর দূরত্ব (4, 3) বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক হয়, তবে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

২। একটি সরলরেখা (2, 6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং যা দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশের সমষ্টি 15 ; রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (2, −1) বিন্দু হতে $3x-4y+5=0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। এর সাহায্যে লম্বের দৈর্ঘ্য বের কর।

৩। মূল বিন্দু থেকে কোন সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং তা X-অক্ষের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, (a, b) বিন্দুটি $3x-4y+1=0$ এবং $4x+3y+1=0$ রেখাদ্বয় হতে সমদূরবর্তী হলে দেখাও যে, $a+7b=0$ অথবা $7a-b+2=0$.

৪। (0, −1) ও (2, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অংকন করা হল। বৃত্তটির সমীকরণ এবং Y-অক্ষের ছেদিতাংশের পরিমাণ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, একটি বৃত্ত (−6, 5) (−3, −4) এবং (2, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। $x^2+y^2-4x+6y+c=0$ বৃত্তটি X-অক্ষকে স্পর্শ করে। C-এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $x^2+y^2=20$ বৃত্তের $x=2$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৬। এমন একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র $(-1, 3)$ বিন্দুতে এবং শীর্ষ $(4, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত। ৩

অথবা, যদি $y=2x+2$ রেখাটি $y^2=4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৭। $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৩

অথবা, অধিবৃত্ত $7x^2-9y^2-14x-36y-92=0$ এর কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৮। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৩

অথবা, একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ এবং $\vec{b}=2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এর সমতলের উপর লম্ব।

৯। $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$ এবং $\vec{b}=3\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}$ দুটি ভেক্টর হলে $\vec{a}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b}$ এর এবং $\vec{b}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{a}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

অথবা, $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{B}=-5\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় কর।

ক্যালকুলাস

১০। যদি $\varphi(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ হয়, তাহলে দেখাও যে, ৪

$$\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right).$$

অথবা, মান নির্ণয় কর ঃ

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^3\theta-\tan^3\theta}{\tan\theta}$$

১১। মূল নিয়মে $\sin x$-এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪

অথবা, যে-কোন দুইটির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ

(i) $(\cot x)^{\tan x}$; (ii) $\sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$;

(iii) $\cot^{-1}\frac{1+x}{1-x}$; (iv) $x^y=y^x$.

১২। $y=(\cos^{-1}x)^2$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=2.$ ৪

অথবা, $y=e^x\cos x$ হলে, দেখাও যে, $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0.$

১৩। ম্যাকলরিনের সূত্রের সাহায্যে $\sin x$ অথবা $\tan^{-1}x$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ৪

১৪। a-এর মান কত হলে, $y=ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x অক্ষের সাথে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে ? ৪

অথবা, $f(x)=x^3-3x^2-45x+13$-এর লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় কর।

১৫। যে-কোন একটির যোজিত ফল নির্ণয় কর ঃ ৫

(i) $\int\frac{x^2\tan^{-1}x^3}{1+x^6}dx$; (ii) $\int x\tan^{-1}x\,dx$.

১৬। যে-কোন একটির মান নির্ণয় কর ঃ ৫

(i) $\int_0^{\pi/4}\tan^3x\sec^2x\,dx$; (ii) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{9-\sin^2x}dx$.

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক অনুমোদিত